<u>Esempio</u>: consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

usiamo il teorema di Rouché-Capelli per determinare se il sistema sia compatibile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

$rg(A) = 2$ perché A è a scala e ha 2 righe non nulle

$rg(A|b) = 2$ perché $(A|b)$ è a scala e ha 2 righe non nulle

quindi $rg(A) = rg(A|b)$ e dunque il sistema è compatibile; le soluzioni dipendono da $4-2=2$ parametri liberi

$$\begin{cases} x_1 = 2(x_4+2) - 3x_3 + x_4 = -3x_3 + 3x_4 + 4 \\ x_2 = x_4 + 2 \end{cases}$$

vediamo che x_3 e x_4 possono essere scelti come parametri liberi; una generica soluzione è della forma (ponendo $x_3 = u$ e $x_4 = v$)

$$\begin{pmatrix} -3u+3v+4 \\ v+2 \\ u \\ v \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base del sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $AX = 0$ — soluzione particolare

ricordiamo che

$$\#\text{ di parametri liberi} = \dim \text{ soluzioni di } AX = 0.$$

<u>Cor</u>: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$rg(A) = n \iff \text{per ogni } b \in K^n, \text{ il sistema } AX = b \text{ è compatibile}$$

(ovvero, il rango è il massimo possibile)

Dim: dalla dimostrazione del teorema di Rouché-Capelli, abbiamo visto che dato $b \in K^n$, allora

$$AX = b \text{ è compatibile} \iff b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

nella nostra situazione, $span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^n$ e notiamo che $\dim K^n = n$, pertanto

$$\begin{aligned} rg(A) = n &\iff \dim(span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})) = n \\ &\iff span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = K^n \\ &\iff \forall b \in K^n,\ b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \\ &\iff \forall b \in K^n, \text{ il sistema } AX = b \text{ è compatibile} \end{aligned}$$

Abbiamo visto che per il teorema di Cramer, se A è invertibile, allora $\forall b \in K^n$, il sistema $AX = b$ è compatibile, dunque $rg(A)$ è il massimo possibile.

<u>Prop</u>: sia $A \in M_n(K)$, allora $rg(A) = n$ (ovvero, è il massimo possibile) se e solo se A è invertibile.

Dim: "$\Leftarrow$" se A è invertibile, per il teorema di Cramer allora $\forall b \in K^n$, il sistema $AX = b$ è compatibile e dunque $rg(A) = n$.

"$\Rightarrow$" supponiamo che $rg(A) = n$, vogliamo mostrare che esiste $B \in M_n(K)$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$; è sufficiente dimostrare che $A \cdot B = \mathbb{1}_n$; vale che $A \cdot B = \mathbb{1}_n$ se e solo se per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A \cdot B^{(i)} = i\text{-esima colonna della matrice } \mathbb{1}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{denotiamo questo vettore con } e_i} \leftarrow \text{posizione } i\text{-esima}$$

quindi la i-esima colonna di B, ovvero $B^{(i)}$, è soluzione del sistema lineare $AX = e_i$, pertanto A è invertibile (ovvero, siamo in grado di costruire una matrice B tale che $A \cdot B = \mathbb{1}_n$) se e solo se tutti i sistemi lineari $AX = e_i$ sono compatibili;

ora, per ipotesi noi abbiamo che $rg(A) = n$, e dunque $\forall b \in K^n$, il sistema $AX = b$ è compatibile; pertanto, scegliendo di volta in volta b come $e_1, e_2, \dots, e_n$ otteniamo che tutti i sistemi $AX = e_i$ sono compatibili, ovvero che la matrice A è invertibile (e le soluzioni di tali sistemi lineari restituiscono le colonne della matrice inversa di A).

Da questo risultato segue un <u>algoritmo</u> per determinare l'inversa di una matrice quadrata $A \in M_n(K)$, quando essa è invertibile.

Dalla dimostrazione precedente abbiamo visto che dobbiamo risolvere i sistemi lineari $AX = e_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Cerchiamo di risolverli "tutti allo stesso tempo", ovvero consideriamo la matrice

$$(A \mid \mathbb{1}_n) = \underbrace{\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}\right)}_{\text{questa matrice codifica } n \text{ sistemi lineari } AX = e_i}$$

Se A è invertibile, allora $rg(A) = n$ e dunque A può essere portata a scala nella forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tutti i gradini della forma a scala hanno lunghezza 1, infatti $rg(A) = n$ impone che $\tilde{A}$ non possa avere righe nulle.

Adoperando opportune operazioni elementari, possiamo usare l'ultima riga per trasformare l'ultima colonna nel vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A questo punto possiamo usare la penultima riga per trasformare la penultima colonna nel vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. In questo modo quindi portiamo $\tilde{A}$ nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 \\ & 1 & * \cdots & * & 0 \\ & & \ddots & * & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & * & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{1}_n$$

Se ora applichiamo queste operazioni elementari a tutta la matrice $(A|\mathbb{1}_n)$ allora passiamo

$$\text{da } (A \mid \mathbb{1}_n) \text{ a } (\mathbb{1}_n \mid B)$$

Notiamo che $(A|\mathbb{1}_n)$ codifica tutti i sistemi del tipo $AX = e_i$, le cui soluzioni sono le colonne della matrice inversa di A. Invece la matrice $(\mathbb{1}_n|B)$ codifica i sistemi $\mathbb{1}_n \cdot X = B^{(i)}$, le soluzioni sono le colonne della matrice B. Dato che per passare da $(A|\mathbb{1}_n)$ a $(\mathbb{1}_n|B)$ abbiamo usato solo operazioni elementari e queste ultime non cambiano l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, otteniamo che

$$\underbrace{\text{soluzione di } AX = e_i}_{i\text{-esima colonna dell'inversa di } A} = \underbrace{\text{soluzione di } \mathbb{1}_n X = B^{(i)}}_{i\text{-esima colonna di } B}$$

Pertanto la matrice B che otteniamo alla fine di questo processo è proprio l'inversa di A.

<u>Esempio</u>: consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$ perché A non è la matrice nulla e le colonne non sono proporzionali tra di loro

pertanto A è invertibile:

$$(A \mid \mathbb{1}_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

pertanto $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ è l'inversa di A.

<u>Determinante</u>

Andiamo ad associare a ogni matrice quadrata A un elemento di K che ci permetta di stabilire se A sia invertibile o meno. Questo elemento si chiamerà il <u>determinante</u> di A.

Consideriamo una generica matrice $A \in M_2(K)$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Consideriamo $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \overbrace{-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}}^{=0} \\ \underbrace{a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}}_{=0} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ con } d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pertanto otteniamo che

$$A \text{ è invertibile} \iff a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

e in tal caso l'inversa di A è

$$\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: sia $A \in M_2(K)$ con $A = (a_{ij})$, definiamo il <u>determinante</u> di A come lo scalare

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Quanto abbiamo visto ci permette di dire

<u>Prop</u>: sia $A \in M_2(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \iff \det(A) \neq 0$$

e in tal caso $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

<u>Esempio</u>: se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, allora $\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$

vale quindi che $\det(A) \neq 0$ e A è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Andiamo ora a costruire un analogo del determinante per matrici 2x2, ovvero andiamo ad associare ogni matrice quadrata uno scalare il cui annullarsi caratterizzerà la non-invertibilità della matrice. Lo faremo in maniera ricorsiva.

<u>Def</u>: sia $A \in M_n(K)$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ due indici ~~fissati~~; definiamo la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ come la matrice ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A; tale matrice A_{ij} si dice il <u>minore</u> ij-esimo di A

<u>Esempio</u>: se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, allora $A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$