Determinante

Def.: sia $A \in M_n(K)$, definiamo il <u>determinante</u> di A in maniera ricorsiva nel modo seguente:

- se $n = 1$, ovvero $A = (a_{11})$, definiamo $\det(A) = a_{11}$
- se $n > 1$, definiamo

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

Oss.: verifichiamo che le due definizioni di determinante per una matrice 2×2 coincidono:

- da una parte $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- dall'altra $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det(A_{21})$

$$= a_{11} \cdot \det((a_{22})) - a_{21} \cdot \det((a_{12}))$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) + (-1) \cdot 0 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) + 1 \cdot 2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) + 0 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1)$$

$$= -2 - 4 = -6.$$

Teorema: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Per le matrici 3×3 (e <u>solo</u> per esse) vale la <u>formula di Sarrus</u>

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Prop.: il determinante gode delle seguenti proprietà:

D1. (multilinearità)

sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo $A_{(i)} = R_1 + R_2$ (la riga i-esima è somma di due righe) per qualche vettore riga R_1, R_2

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)} = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

inoltre se invece $A_{(i)} = c \cdot R$ per qualche $c \in K$ e qualche vettore riga R, allora

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ c \cdot R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

analoghe proprietà valgono se al posto delle righe consideriamo le colonne.

D2. (alternanza, o antisimmetria)

se scambiamo di posto due righe o due colonne, il determinante cambia di segno, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

se ci sono k scambi, il segno del determinante va moltiplicato per $(-1)^k$.

D3. (normalizzazione)

$$\det(\mathbb{1}_n) = 1$$

Teorema: (teorema di caratterizzazione del determinante)

il determinante è l'unica funzione $M_n(K) \to K$ che soddisfi le proprietà D1, D2, D3.

Esempio:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \overset{D1}{=} 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{D1}{=}$$

$$= 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \left(1 \cdot (-2) - 0 + 3 \cdot 0\right) =$$

$$= 4 \cdot (-2) = -8$$

Cor.:
i. (se $\operatorname{char} K \neq 2$) se A ha due righe uguali, allora per D2 abbiamo $\det(A) = -\det(A)$ (scambiando le due righe uguali) allora $\det(A) = 0$; analogamente per le colonne

ii. se A ha una riga nulla, allora per D1 $\det(A) = 0$ (perché posso scrivere tale riga come zero per se stessa); analogamente per le colonne.

Cor.:
i. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE1, allora $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$

ii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE2, allora $\det(\tilde{A}) = c \cdot \det(A)$ dove $c \in K$ è lo scalare utilizzato nell'operazione

iii. se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con una operazione elementare OE3, allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$, infatti

se $A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ e $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)}$

$$\det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + c \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)} \overset{D1}{=} \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)} + c \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)}$$

$$= \det(A) + c \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}_{(i)}}_{=0}$$

la riga $A_{(j)}$ compare dunque in posizione (i) e (j), pertanto questa matrice ha due righe uguali

$$= \det(A)$$

Cor.: se $A \in M_n(K)$ e $\tilde{A}$ è la matrice a scala ottenuta applicando ad A l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss, allora

$$\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A) \quad \text{per un certo } \lambda \in K \setminus \{0\}$$

in particolare

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(\tilde{A}) = 0.$$

inoltre se nell'algoritmo di gradinizzazione di Gauss non effettuiamo mai la normalizzazione dei pivot a 1, allora $\det(\tilde{A}) = (-1)^k \cdot \det(A)$ dove k è il numero di scambi di righe effettuati durante l'algoritmo.

Prop.: se $A \in M_n(K)$ è una matrice triangolare superiore, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ovvero } a_{ij} = 0 \text{ se } i > j$$

allora $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Dim.: dimostriamo questo risultato per induzione su n

$\boxed{n=1}$ in questo caso $A = (a_{11})$ e $\det(A) = a_{11}$ per definizione, dunque vale la tesi

$\boxed{\text{passo induttivo}}$ possiamo supporre $n > 1$; vale che

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \det(A_{11}) - 0 \cdot \det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) - \ldots \pm 0 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det(A_{n1})$$

$$= a_{11} \cdot \det(A_{11})$$

ora

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pertanto A_{11} è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ triangolare superiore,

dunque per l'ipotesi induttiva $\det(A_{11}) = a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$;

in definitiva, $\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Quindi se $\tilde{A}$ è una matrice a scala e quadrata, vale che

$$\det(\tilde{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{A} \text{ non ha righe nulle}$$

Infatti $\tilde{A}$ è una matrice triangolare superiore essendo a scala e quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi della sua diagonale.

"$\Rightarrow$" se $\det(\tilde{A}) \neq 0$, allora tutti gli elementi sulla diagonale sono non nulli; quindi nessuna riga è tutta nulla.

"$\Leftarrow$" se $\tilde{A}$ non ha righe nulle, allora tutti i suoi gradini sono di larghezza 1 essendo $\tilde{A}$ a scala, e quindi gli elementi della diagonale di $\tilde{A}$ sono i suoi elementi di pivot, che sono tutti non nulli; pertanto il loro prodotto, che è $\det(\tilde{A})$ è non nullo.

Teorema: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

ovvero

$$A \text{ non è invertibile} \Leftrightarrow rg(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

Dim.: questo segue dai risultati che abbiamo dimostrato/enunciato fino ad ora.

Vedremo ora che il determinante si può calcolare sviluppandolo rispetto a una qualsiasi colonna o riga. Queste formule prendono il nome di <u>sviluppi di Laplace</u> del determinante.

Teorema: (sviluppo rispetto alla k-esima colonna)

sia $A \in M_n(K)$ e sia $k \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

Teorema: (sviluppo rispetto alla l-esima riga)

sia $A \in M_n(K)$ e sia $l \in \{1, \ldots, n\}$, allora

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot \det(A_{lj})$$

Esempio: sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

sviluppiamo $\det A$ lungo la seconda colonna

$$\det A = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 = -3$$