

ESERCIZI SU BASI E RANGO
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Calcola il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 12 & 14 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 13 & -9 \\ -2 & -1 & -6 & -9 & 11 \\ -1 & 0 & -4 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -8 & -11 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & -13 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & 9 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Risolvi, quando possibile, i seguenti sistemi lineari attraverso questa procedura:

- (1) **Computa** il rango della matrice delle indeterminate e della matrice completa e **decidi** se il sistema sia compatibile usando il teorema di Rouché-Capelli.
- (2) **Computa** una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.
- (3) **Computa** una soluzione particolare del sistema lineare.
- (4) **Descrivi** la generica soluzione del sistema lineare usando il teorema di struttura per sistemi lineari.

$$\begin{cases} x + 6y + 5z = -10 \\ -x - 6y - 4z = 9 \\ -x - 6y - 10z = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 10y - 11z = -2 \\ 3x - 5y - 12z = 4 \\ 2x - 8y - 7z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 13z = -11 \\ x + 2y + 7z = -5 \\ x + y + 7z = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y - 5z = 0 \\ -3x + 11y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 3z = -1 \\ x + 5y + 12z = -4 \\ 2x + 4y + 13z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y - 13z = -18 \\ x - 2z = -3 \\ -2x + 5z = 7 \end{cases}$$

Esercizio 3

Calcola una base di $U \cap W$ dove $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ sono i seguenti sottospazi vettoriali:

$$(1) U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 4w + x - y + 5z = 0 \\ 9w - x - 2y + 8z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -9w + 2y - 9z = 0 \\ 9w - 2y + 9z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$(2) U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 6w + y - 3z = 0 \\ 14w - x + y - 5z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -5w + x + y = 0 \\ 9w + y - 4z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$(3) U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2w + y + 4z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -x - 2y - 8z = 0 \\ -w + 3y + 7z = 0 \end{cases} \right\}$$