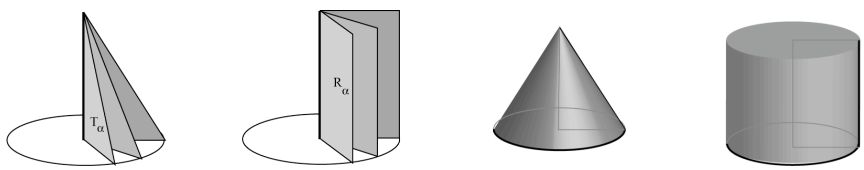
La Tromba di Gabriele

I dubbi di Cavalieri

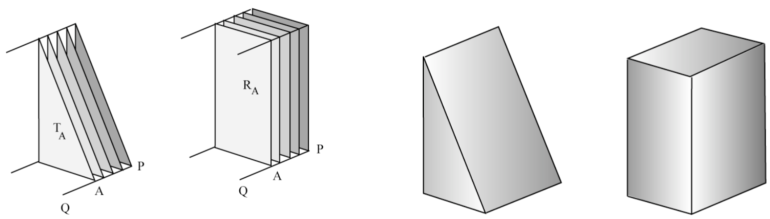
Un cono si ottiene ruotando un triangolo rettangolo attorno a un cateto e risulta quindi formato da infiniti triangoli rettangoli T_α, uno per ogni angolo α. Se raddoppiamo il triangolo rettangolo fino a ottenere un rettangolo che ruotiamo nello stesso modo, abbiamo un cilindro che risulta formato da infiniti rettangoli R_α, uno per ogni angolo α e ognuno con una estensione doppia di quella del triangolo.



Dato che il cilindro è fatto dalla stessa infinità di parti del cono e dato che ogni parte R_α ha estensione doppia della corrispondente parte T_α, ci si aspetterebbe che l'estensione del cilindro, cioè il suo volume sia il doppio di quello del cono. Risulta invece che il volume del cilindro è tre volte quello del cono. Ancora una difficoltà a estendere ragionamenti su insiemi finiti a insiemi infiniti: se le parti da sommare sono infinite la proprietà distributiva non si può applicare.

Da quello che Cavalieri stesso afferma, questo cruccio deve avergli occupato la mente non poco, fino a che una improvvisa illuminazione deve avergli fatto vedere le cose da un nuovo punto di vista.

Se invece di disporre le infinite fette attorno a un asse le sovrapponiamo una all'altra traslandole lungo un dato segmento PQ, la situazione è analoga: per ogni punto $A \in PQ$ abbiamo un triangolo T_A e un rettangolo R_A di area doppia, ma ora il volume del solido formato dai rettangoli è il doppio di quello formato dai triangoli dato che il volume di questi prismi si ottiene moltiplicando l'altezza PQ (che è la stessa nei due solidi) con le basi che hanno area una il doppio dell'altra.



Da questo Cavalieri arriverà a formulare il suo principio del quale afferma di avere verificato la validità su moltissimi esempi: i solidi debbono essere costruiti con "fette parallele" e allora, se le altezze sono le stesse (cioè comporta che le fette corrispondono uno a uno ai punti di uno stesso segmento) e se il rapporto tra le aree delle fette che si corrispondono è costante, allora anche i volumi sono nello stesso rapporto. La formula dello stesso Cavalieri si riduce alla sentenza:

Ut unum ad unum sic omnia ad omnia

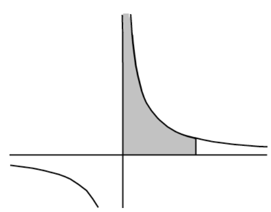
La tromba dell'Arcangelo

L'esempio del giovanissimo Torricelli, entusiasta del principio di Cavalieri, è così estremo che lo stesso Cavalieri ne ebbe a dubitare.

Torricelli inventa un solido, che lui chiama il *solido iperbolico*, che si ottiene ruotando una superficie di area infinita ma che, come solido, ha un volume finito e superficie "laterale" infinita.

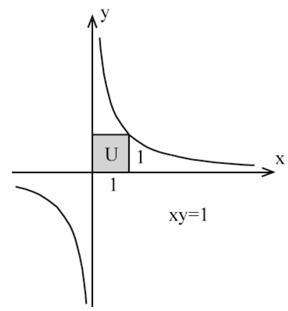
In tal caso, con maggiore chiarezza, emerge la difficoltà a trattare ingenuamente concetti come quello di infinito, finito, illimitato, limitato, e per la prima volta un oggetto illimitato (che nessuna sfera può racchiudere) ha l'ardire di avere un volume finito.

La superficie iniziale che viene ruotata è quella compresa tra un arco di iperbole equilatera e un suo asintoto.



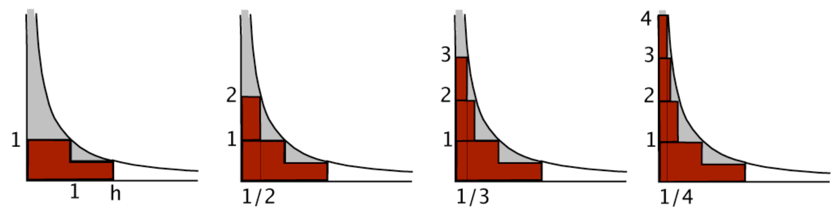
• Vediamo come Torricelli prova che la superficie tratteggiata nella figura ha un'area S maggiore di un qualunque numero K e dunque è infinita.

Scegliendo come assi di riferimento i due asintoti, le coordinate (x, y) di un punto P dell'iperbole equilatera verificano l'equazione $xy = a^2$, dove a è una costante che, per semplicità, possiamo prendere come unità di misura. Quindi ogni punto dell'iperbole ha coordinate $(x, 1/x)$.



L'unità di misura per le aree è il quadrato U di lato 1 indicato nella figura precedente e le aree saranno tutte espresse in rapporto a U.

Costruiamo ora un "grattacielo" H_n di n piani interamente contenuto in S e diamo una minorazione della sua area.



Il primo piano ha un'area che vale

$$h_0 = 1 + \frac{h-1}{h}.$$

Il secondo piano ha altezza 1 e larghezza $1/2$, e dunque area $1/2$.
Il terzo piano ha altezza 1 e larghezza $1/3$, e dunque area $1/3$.
In generale l'ennesimo piano avrà altezza 1 e larghezza $1/n$ e dunque area $1/n$.
Pertanto l'area occupata dal grattacielo di n piani sarà

$$H_n = h_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Per minorare tale quantità, basta osservare che

$$1/3 > 1/4, 1/5 > 1/8, 1/6 > 1/8, 1/7 > 1/8 \ldots$$

e raggruppando opportunamente i primi 2^{k+1} termini della somma precedente (dove ovviamente $n \geq 2^{k+1}$) si ottiene che

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k}\right)$$

è maggiore di

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}.$$

In conclusione

$$S > H_n > \frac{k+1}{2}, \quad n \geq 2^{k+1}.$$

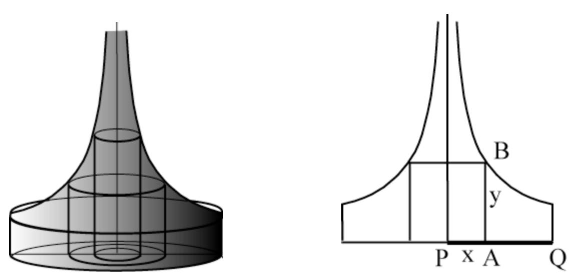
Ora, per ogni numero K, se si sceglie $k \geq 2K-1$ e, successivamente, si sceglie $n \geq 2^{k+1}$, si ottiene

$$S > H_n > \frac{k+1}{2} \geq K$$

e dunque S è infinita.

• Il giovane Torricelli prova che il solido che si ottiene ruotando S attorno all'asintoto ha un volume calcolabile usando la teoria degli indivisibili curvi sviluppata da Cavalieri. Sorprendentemente, tale volume è finito!

Torricelli immagina questo solido formato da infinite "fette cilindriche parallele" ognuna delle quali è la superficie laterale di un cilindro che ha come base il cerchio di raggio $PA = x$ e come altezza il segmento AB che misura $y = 1/x$.

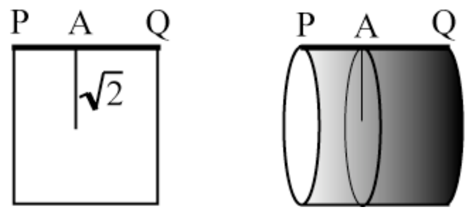


Tali fogli cilindrici sono uno dentro l'altro e, se il loro raggio PA decresce, la loro altezza AB cresce. La superficie laterale del cilindro di raggio PA ha come area (poiché $xy = 1$)

$$S_A = (2\pi x)y = 2\pi$$

dunque costante, per ogni punto A del segmento PQ!

Si applica ora il "principio di Cavalieri": interpretiamo S_A come misura dell'area di un cerchio di raggio $\sqrt{2}$ e pensiamolo "applicato" nel punto A. Variando il punto A nel segmento PQ, questi fogli circolari, tutti uguali tra loro, descrivono un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza uguale al segmento PQ.



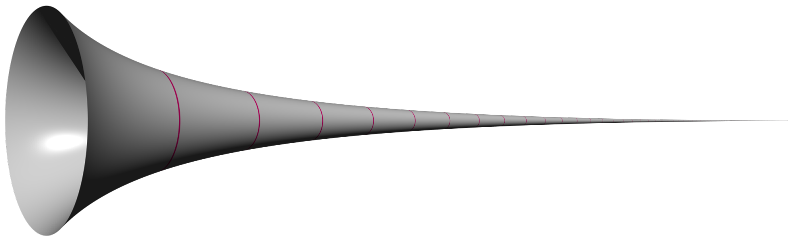
Dato che il solido iperbolico è formato da infiniti fogli cilindrici paralleli e dato che i fogli corrispondono a un cerchi paralleli di un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza $PQ = h$ e dato che i fogli cilindrici e i cerchi hanno la stessa area, usando il principio di Cavalieri, abbiamo che il volume del solido iperbolico è uguale a quello del cilindro:

$$V = 2\pi h.$$

Osserviamo che il diametro di tale cilindro vale $2\sqrt{2}$ che è la distanza tra i vertici dell'iperbole (asse dell'iperbole).

Questo fatto fortunato permette a Torricelli di dare un elegante enunciato del suo stupefacente risultato: il volume di un solido iperbolico che ha come base un cerchio di raggio h e come profilo una iperbole equilatera di asse p è uguale al volume del cilindro di altezza h e diametro p.

I calcoli odierni



Con gli strumenti dell'analisi moderna, il calcolo precedente e quello della superficie laterale del solido iperbolico (che Torricelli calcola analogamente) sono facili esercizi dei primi corsi di analisi.

Infatti, consideriamo ancora la funzione $y = \frac{1}{x}$ e consideriamo, per praticità di calcolo, il solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x della curva del grafico nell'intervallo $[1, +\infty)$.

Per ogni punto $a \in [1, +\infty)$, il volume e l'area relativi all'intervallo $[1, a]$ sono

$$V_a = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$$A_a = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx > 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \ln(a)$$

Quindi

$$V = \lim_{a\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi \quad , \quad A > \lim_{a\to\infty} 2\pi \ln(a) = +\infty.$$

Si noti che la discordanza col risultato di Torricelli riguardo al volume ($V = 2\pi$ nel caso $h = 1$) è dovuto al cilindro di raggio $PQ = h = 1$ e di altezza $1/h = 1$: tale volume è infatti π e va sottratto dal risultato di Torricelli.

Il secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale

Noto come *Teorema di Torricelli-Barrow*, intuito da Torricelli ed esplicitato da Isaac Barrow (1630-1677), matematico inglese e maestro di Newton.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul suo dominio e che ammetta primitiva $F(x)$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$