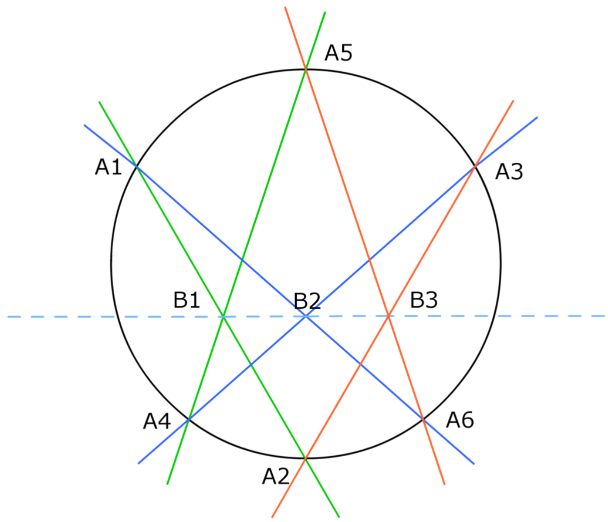
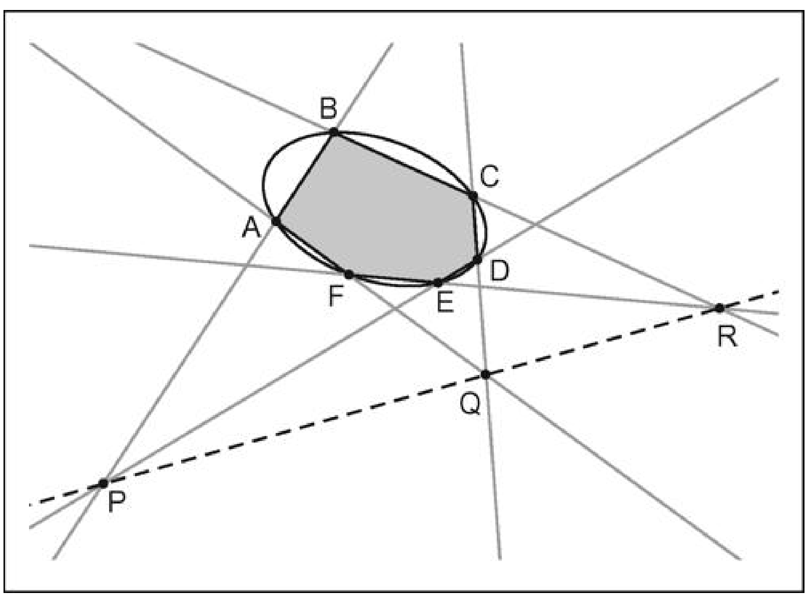
Teorema di Pascal



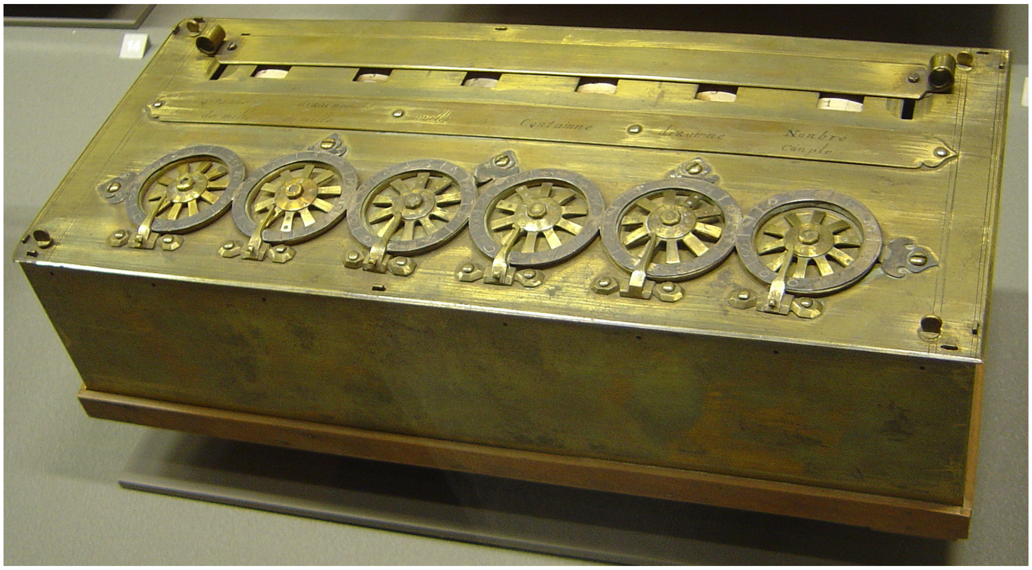
Siano $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sei punti nel piano e siano B_1, B_2, B_3 i punti comuni alle coppie di rette corrispondenti ai lati opposti dell'esagono, cioè:

$$B_1 = r(A_1, A_2) \cap r(A_4, A_5)$$
$$B_2 = r(A_3, A_4) \cap r(A_6, A_1)$$
$$B_3 = r(A_2, A_3) \cap r(A_5, A_6).$$

I sei punti iniziali appartengono a una conica se, e soltanto se, i tre punti B_1, B_2, B_3 appartengono a una retta, chiamata *retta di Pascal*.



La Pascalina, 1642



Triangolo di Pascal

Nonostante la vastità dei suoi interessi, Pascal è noto soprattutto per il triangolo aritmetico, presentato nel suo *Trattato sul Triangolo Aritmetico* del 1654.

Le prime righe del triangolo sono le seguenti:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Ogni numero che non si trova sui lati del triangolo è ottenuto sommando i due numeri adiacenti che si trovano sulla riga superiore.

I numeri del triangolo di Pascal corrispondono ai coefficienti ottenuti nello sviluppo della potenza di un binomio. Ad esempio nella seconda e la terza riga troviamo i coefficienti dei seguenti sviluppi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

I coefficienti negli sviluppi binomiali sono chiamati *coefficienti binomiali*. Il coefficiente del monomio $a^k b^{n-k}$ nello sviluppo di $(a+b)^n$ viene indicato con il *simbolo binomiale*

$$\binom{n}{k}$$

Teorema di Pascal
sulla somma di potenze di interi consecutivi

Il problema consiste nel calcolare il valore di una somma di potenze di questo tipo:

$$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$$

dove $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Usualmente si pone $S_r(0) = 0$.

Le prime formule erano conosciute fin dall'antichità (greci, arabi...):

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Queste prime formule possono oggi essere dimostrate facilmente mediante il metodo di induzione matematica.

I pitagorici dimostrarono la prima formula con metodi geometrici: i numeri naturali consecutivi possono essere disposti per formare un triangolo, e avvicinando due triangoli si forma un rettangolo. Nicomaco di Gerasa (60-120 d.C.) dimostrò la formula per $r = 3$.

Pascal, usando il Triangolo aritmetico e il ragionamento ricorsivo, dimostrò il seguente teorema che permette, (mediante ricorsività) di calcolare $S_r(n)$ nel caso generale.

Teorema di Pascal.

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

In forma estesa la formula è

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \binom{p+1}{0} S_0(n) + \binom{p+1}{1} S_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} S_p(n)$$

dunque si ricava $S_p(n)$ dopo aver calcolato $S_0(n), S_1(n), \ldots, S_{p-1}(n)$.