Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 6

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

30 ottobre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Si fissi $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dimostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali.

a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali $(\mathbb{R}[x], +; \mathbb{R}, \cdot)$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale;

b) $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq d\}$;

c) $A = \left\{a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 + a_1 + \ldots + a_d = 0\right\}$;

d) $B = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^d a_d = 0\right\}$;

e) $\forall k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $C_{d,k} = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid da_0 + (d-1)a_1 + \ldots + (d-k)a_k = 0\right\}$.

Esercizio 2. Calcolare una base per ognuno degli spazi vettoriali citati nel precedente esercizio.

Esercizi 3. Dimostrare che i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n_m$.

a) $T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right)$ l'insieme delle matrici triangolari superiori di tipo $[m, n]$; ovvero:

$$T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

b) $T_i\left(\mathbb{R}^n_m\right)$ l'insieme delle matrici triangolari inferiori di tipo $[m, n]$; ovvero:

$$T_i\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i > j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

E posto $m = n$ continuare coi seguenti insiemi.

c) $diag(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonali di ordine n; ovvero:

$$diag(n, \mathbb{R}) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_n \mid \forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\},\ a^j_i = 0\right\}.$$

d) $S(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n; ovvero:

$$S(n,\mathbb{R}) = \left\{A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid A = A^T\right\}.$$

e) $AS(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici anti-simmetriche di ordine n; ovvero:

$$AS(n,\mathbb{R}) = \left\{A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid -A = A^T\right\}.$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari omogenei, esplicitandone l'insieme delle soluzioni e, visto quest'ultimo come uno spazio vettoriale, determinare una base.

$$\begin{cases} 3t - 2z + 5x = 0 \\ 2x + 4y - 7t = 0 \\ 3y - 2t + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x + 4y = 0 \\ 2z + 3y - t = 0 \\ 3x - y + 2t + z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x = 0 \\ 2x + 4y - 7t = 0 \\ 3y - 2t + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x + 4y = 0 \\ 2z + 3y - t = 0 \\ 3x - y + 2t + z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases}.$$

Domanda: le precedenti risposte dipendono dal campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali?

Esercizi 5. Dimostrare o confutare che i seguenti sistemi di vettori siano linearmente indipendenti:

a) $\{(1,0),(0,1),(-1,1)\} \subsetneq \mathbb{R}^2$;

b) $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\} \subsetneq \mathbb{R}^3$;

c) $\{(1,0,-1,0),(1,1,0,1),(2,1,-1,1)\} \subsetneq \mathbb{R}^4$;

d) $\{(1,i,2),(2,1,i),(-1,1,0)\} \subsetneq \mathbb{C}^3$;

e) $\{(i+1,1,2),(2,0,1),(1,3,i+2)\} \subsetneq \mathbb{C}^3$;

f) $\{(i,1,i),(3,4,2),(7,1,3)\} \subsetneq \mathbb{C}^3$.