Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 4

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

08 novembre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Si fissi $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, calcolare una base e la dimensione dei seguenti spazi vettoriali.

a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali $(\mathbb{R}[x], +; \mathbb{R}, \cdot)$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale;

b) $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq d\}$;

c) $A = \left\{a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 + a_1 + \ldots + a_d = 0\right\}$;

d) $B = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^d a_d = 0\right\}$;

e) $\forall k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $C_{d,k} = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid da_0 + (d-1)a_1 + \ldots + (d-k)a_k = 0\right\}$.

Esercizi 2. Calcolare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n_n$.

a) $T^s\left(\mathbb{R}^n_n\right)$ l'insieme delle matrici triangolari superiori quadrate di ordine n; ovvero:

$$T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

b) $T_i\left(\mathbb{R}^n_m\right)$ l'insieme delle matrici triangolari inferiori quadrate di ordine n; ovvero:

$$T_i\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i > j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

c) $diag(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonali di ordine n; ovvero:

$$diag(n, \mathbb{R}) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_n \mid \forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\},\ a^j_i = 0\right\}.$$

d) $S(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n; ovvero:

$$S(n, \mathbb{R}) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_n \mid A = A^T\right\}.$$

e) $AS(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici anti-simmetriche di ordine n; ovvero:

$$AS(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid -A = A^T \right\}.$$

Domanda: le precedenti risposte dipendono dal campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali?

Esercizi 3. Dimostrare o confutare che i seguenti sistemi di vettori siano linearmente indipendenti:

a) $\{(1,0),(0,1),(-1,1)\} \subsetneqq \mathbb{R}^2$;

b) $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\} \subsetneqq \mathbb{R}^3$;

c) $\{(1,0,-1,0),(1,1,0,1),(2,1,-1,1)\} \subsetneqq \mathbb{R}^4$;

d) $\{(1,i,2),(2,1,i),(-1,1,0)\} \subsetneqq \mathbb{C}^3$;

e) $\{(i+1,1,2),(2,0,1),(1,3,i+2)\} \subsetneqq \mathbb{C}^3$;

f) $\{(i,1,i),(3,4,2),(7,1,3)\} \subsetneqq \mathbb{C}^3$.

Esercizio 4. Dato il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^5$

$$S = \{(1,-1,3,0,-5),(-1,2,0,-3,1),(2,-2,4,-1,-4),(2,-3,1,2,0)\}$$

a) calcolare la dimensione di $\langle S \rangle$[1], e determinarne una base $\mathcal{B}_S$;

b) completare $\mathcal{B}_S$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 5. Dati il seguenti sistemi di vettori di $\mathbb{C}^4$

$$S = \{(i-1,3,0,i-5),(-1,0,i-3,1),(0,0,i-2,-4),(2,-3i,1,0)\},$$
$$T = \{(i-1,2,0,1),(5,2+i,3,6),(4,4,1-3i,5)\};$$

calcolare le dimensione di $\langle S \rangle$, $\langle T \rangle$, e determinare delle loro basi.

Esercizio 6. Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e $\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$ una sua base.

a) Dimostrare che $\{\underline{u}+\underline{v}, 3\underline{u}-2\underline{w}, 2\underline{w}\}$ è una base di $\mathbb{V}$;

b) Dimostrare che $\{\underline{v},\underline{w},\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}\}$ è una base di $\mathbb{V}$.

[1] Questi è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato da S.