PROP $f \in End(V)$, $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

i). $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ DIAGONALIZZA $f \iff f(v_i) = {}^{\exists}\lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

ii). f DIAGONALIZZABILE $\iff \exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} : v_i$ AUTOVETTORE $\forall i$

iii). $\ker(f) = \{0\} \iff 0 \notin Sp(f)$

iv). L'autovalore λ relativo ad un autovettore v è UNICO.

v). $f(w_i) = \lambda_i w_i$ e λ_i DISTINTI $\forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \{w_i\}_{i=1,\dots,m}$ LIN. INDIP.

vi). $|Sp(f)| \leq n$

vii). $\sum_{\lambda \in Sp(f)} m_g(\lambda, f) \leq n$

viii). $\lambda \in Sp(f) \iff V_\lambda(f) \neq \{0\} \iff \mathcal{P}_f(t)\Big|_{t=\lambda} = 0$

NE SEGUE CHE: $\begin{cases} m_a(\lambda, f) \geq 1 \\ m_g(\lambda, f) \geq 1 \end{cases}$

$\lambda \in Sp(f) \iff \mathcal{P}_f(t)\Big|_{t=\lambda} = 0$ SI LEGGE: GLI ZERI DEL POLINOMIO di f CARATTERISTICO SONO GLI AUTOVALORI di f

SICCOME #ZERI di $\mathcal{P}_f(t) \leq$ ORDINE DI $A_f = n \Rightarrow |Sp(f)| \leq n \Rightarrow$ [viii). $\Rightarrow$ vi).].

Dim.:

DEFINE $\lambda_i := a_{ii}$

i). Se $M^B_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ DIAGONALE $\Rightarrow f(v_i) = a_{ii} v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Se $f(v_i) = \lambda_i v_i \ \forall i \Rightarrow M^B_B(f) \overset{\text{DEF PRODOTTO RIGA PER COLONNA}}{=} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(K)$.

ii). Un altro modo di riscrivere il punto i). usando le definiz.

iii). $0_K \in Sp(f) \Leftrightarrow f(\exists v \neq 0) = 0_K \cdot v \Longleftrightarrow f(v \neq 0) = 0 \Longleftrightarrow \exists v \overset{\neq 0}{\in} \ker(f) \Leftrightarrow \ker(f) \neq \{0\}$

iv). Se $f(v) = \mu v$ e $f(v) = \lambda v \Rightarrow 0 = f(v) - f(v) = (\mu - \lambda)\underbrace{v}_{\neq 0 \text{ AUTOVETTORE}} \Rightarrow \mu = \lambda \in K$

v). **[DIM per INDUZIONE su m].** Se $m=1 \Rightarrow$ non c'è nulla da dim. perché ogni autovettore è diverso da zero e quindi **LIN. INDIP.**

Se $\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = 0 \Rightarrow 0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (\mu_i \lambda_i) w_i = 0}_{=:(1)}$

$\Downarrow$

$\underbrace{\lambda_m \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i\right) = 0}_{=:(2)} \quad \Rightarrow (2)-(1): \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) w_i = 0$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva [supponiamo v). VERA per k vettori, dove $k = 1, \dots, m-1$] vale l'indipendenza lineare, e quindi

$$\underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{ PER IPOTESI}} c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \xRightarrow[\text{ZERO-DIVISORI}]{\text{IN UN CAMPO NON CI SONO}} c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1$$

$$\Downarrow$$

$$c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

vi). $\overbrace{\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}}^{\text{DISTINTI}} = Sp(f) \xRightarrow{v)} f(\exists v_i) = \lambda_i v_i$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. INDIP. $\Rightarrow m \leq \dim(V) = n$

vii). Sia $B_i := \{v_{i,1}, \dots, v_{i, m_g(\lambda_i, f)}\}$ una base di $V_{\lambda_i}(f)$ e dimostriamo che l'unione di tutte queste base $\forall i$ è linearmente indipendente, quindi consideriamo:

$$0 = \begin{cases} \boxed{c_{11} v_{11} + \dots + c_{1, m_g(\lambda_1, f)} v_{1, m_g(\lambda_1, f)}} =: w_1 \in V_{\lambda_1}(f) \\ \boxed{+ c_{21} v_{21} + \dots + c_{2, m_g(\lambda_2, f)} v_{2, m_g(\lambda_2, f)}} =: w_2 \in V_{\lambda_2}(f) \\ + \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boxed{+ c_{k1} v_{k1} + \dots + c_{k, m_g(\lambda_k, f)} v_{k, m_g(\lambda_k, f)}} =: w_k \in V_{\lambda_k}(f) \end{cases}$$

$$k := |Sp(f)|$$

$\Rightarrow w_i \in V_{\lambda_i}(f) \ \forall i$ TUTTI DISTINTI & $w_1 + \dots + w_m = 0 \Longrightarrow w_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m \Longrightarrow c_{i,j} = 0 \ \forall j = 1, \dots, m_g(\lambda_i, f) \ \forall i = 1, \dots, m.$

$\Rightarrow \{v_{11}, \dots, v_{1 m_g(\lambda_1, f)}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{k, m_g(\lambda_k, f)}\} =: \mathcal{Z}$ LIN. INDIP. $\Rightarrow n \geq |\mathcal{Z}| = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f)$

viii).

$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow V_\lambda(f) \neq \{0\}$:

$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow f(\exists v \neq 0) = \lambda v \Leftrightarrow 0 = f(v) - \lambda v = (f - \lambda \cdot Id_V)(v)$

Quindi $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \exists v \in_{\neq 0} \ker(f - \lambda \cdot Id_V) = V_\lambda(f) \Leftrightarrow V_\lambda(f) \neq \{0\}$

$V_\lambda(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow P_f(t)\big|_{t=\lambda} = 0$:

$V_\lambda(f) \neq \{0\} \overset{DEF}{\Leftrightarrow}$

SCORSA LEZIONE

$\Leftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot Id_V) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ STESSA DIM $\Rightarrow$ [MONO $\Leftrightarrow$ EPI $\Leftrightarrow$ ISO]

$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ NON INIETTIVA $\Leftrightarrow$ QUADRATA INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ det $\neq 0$

$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ NON AUTOMORFISMO $\Leftrightarrow$ ENDOMORFISMO = CLASSE DI SIMILARITÀ DI MATRICI RAPPRESENT. DA UNA QUALCHE BASE

$\Leftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ NON INVERTIBILE $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M^B_B(f - \lambda \cdot Id_V)$ NON INVERTIBILE $\exists B$ base di V (e quindi $\forall B$ base di V)

INVERT $\Leftrightarrow$ det $\neq 0$

$\Leftrightarrow \det(M^B_B(f - \lambda \cdot Id_V)) = 0$ $\exists B$ base di V (e quindi $\forall B$ base di V)

$\overset{DEF}{\Leftrightarrow} \det(f - \lambda \cdot Id_V) = 0$ $\exists B$ base di V (e quindi $\forall B$ base di V)

$\overset{DEF}{\Leftrightarrow} P_f(t)\big|_{t=\lambda} = 0.$

$\square$

$\dim(V) = n.$

TEOREMA [1° CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE]

CHE ASSUMIAMO SEMPRE **FINITA** ($\dim(V) = n$).

$$f \text{ DIAGONALIZZABILE} \iff \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_g(\lambda, f) = \dim(V)$$

SOMMIAMO SU TUTTO LO **SPETTRO** DI f, OVVERO SULL'INSIEME DI TUTTI I SUOI **AUTOVALORI**

Dim.: $\boxed{\Leftarrow}$ Sia B una base per $W := V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(f)$, $k = |Sp(f)|$.

PER V). SCORSA PROP.

quindi $\dim(W) = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f)$

e per ipotesi abbiamo che $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) = \dim(V) =: n$ IPOTESI

Quindi ne segue che $\dim(W) = n$, ma siccome $W \subseteq V$ sottospazio allora dobbiamo avere che $V = W$, $\Rightarrow B$ è anche una base per $V \Rightarrow V$ possiede una base di autovettori $\Rightarrow$ (ii). SCORSA PROP.) f è diagonalizzabile.

$\boxed{\Rightarrow}$ f diagonalizzabile $\Rightarrow \exists B$ diagonalizzante di autovettori di f per l'intero spazio vettoriale V. Allora siano

$\{v_{i,1}, \dots, v_{i,\delta_i}\} \subset B$ l'insieme dei vettori di B

che sono autovettori relativi all'autovalore λ_i (i.e. che appartengono a $V_{\lambda_i}(f)$), e quindi si ha che:

$$\delta_i \leq m_g(\lambda_i, f) \qquad \forall i = 1, \dots, k = |Sp(f)|$$

Sommando su tutti gli $i = 1, \dots, k$ si ottiene che:

OGNI AUTOVETTORE È RELATIVO AD UN QUALCHE AUTOVALORE

SOMMANDO SU i

vii). PROP SCORSA

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) \leq \dim(V)$$

Ne segue che $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i, f) = n$, e questo conclude la dimostrazione.

$\square$

TEOREMA [RELAZIONE TRA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $m_a(\lambda, f)$ & MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $m_g(\lambda, f)$]

$f \in End(V)$. Allora si ha che:

$$m_g(\lambda, f) \leq m_a(\lambda, f) \qquad \forall \lambda \in Sp(f)$$

Dim.: Sia $\{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda,f)}\} =: \mathcal{B}$ una base di $V_\lambda(f) \subseteq V$.
Allora **COMPLETIAMO QUESTA BASE** ad una base di V, ottenendo $\mathcal{B}_V := \{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda,f)}, w_1, \dots, w_n\}$
È possibile esprimere l'endomorfismo $f \in End(V)$ come una matrice quadrata rispetto alla base $\mathcal{B}_V$ di V:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{V_\lambda} & E \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & E \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

QUESTA È L'IDENTITÀ SUL SOTTOSPAZIO $V_\lambda(f)$ PER λ

MATRICE NULLA

ALTRE DUE MATRICI ARBITRARIE DI CUI NON SAPPIAMO MOLTO MA NON IMPORTA

$$\Rightarrow P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t) := \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - t \cdot Id_V\right)$$
$$= \det\left((\lambda - t) \cdot Id_{V_\lambda(f)}\right) \cdot \det(H - t \cdot Id_V)$$
$$= (\lambda - t)^{m_g(\lambda,f)} \cdot \det(H - t \cdot Id_V)$$

Quindi è evidente che la molteplicità di $t = \lambda$ come zero del poly $P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t)$ è almeno $m_g(\lambda,f)$. Quindi $m_a(\lambda,f) \geq m_g(\lambda,f) \ \forall \lambda \in Sp(f)$ □