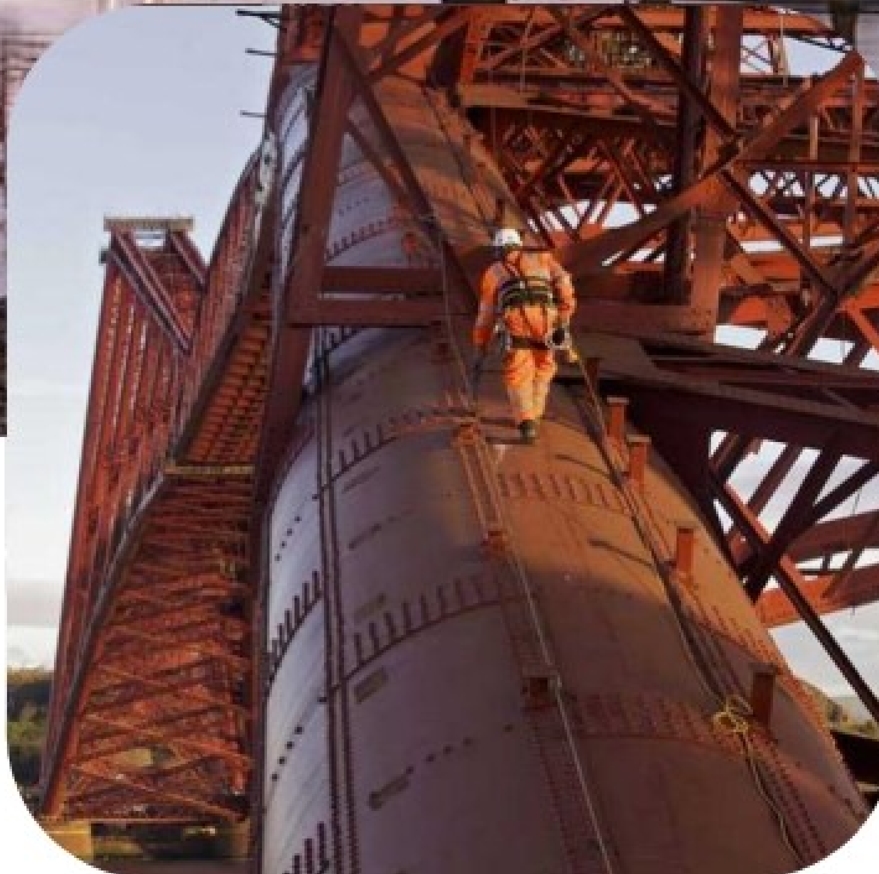
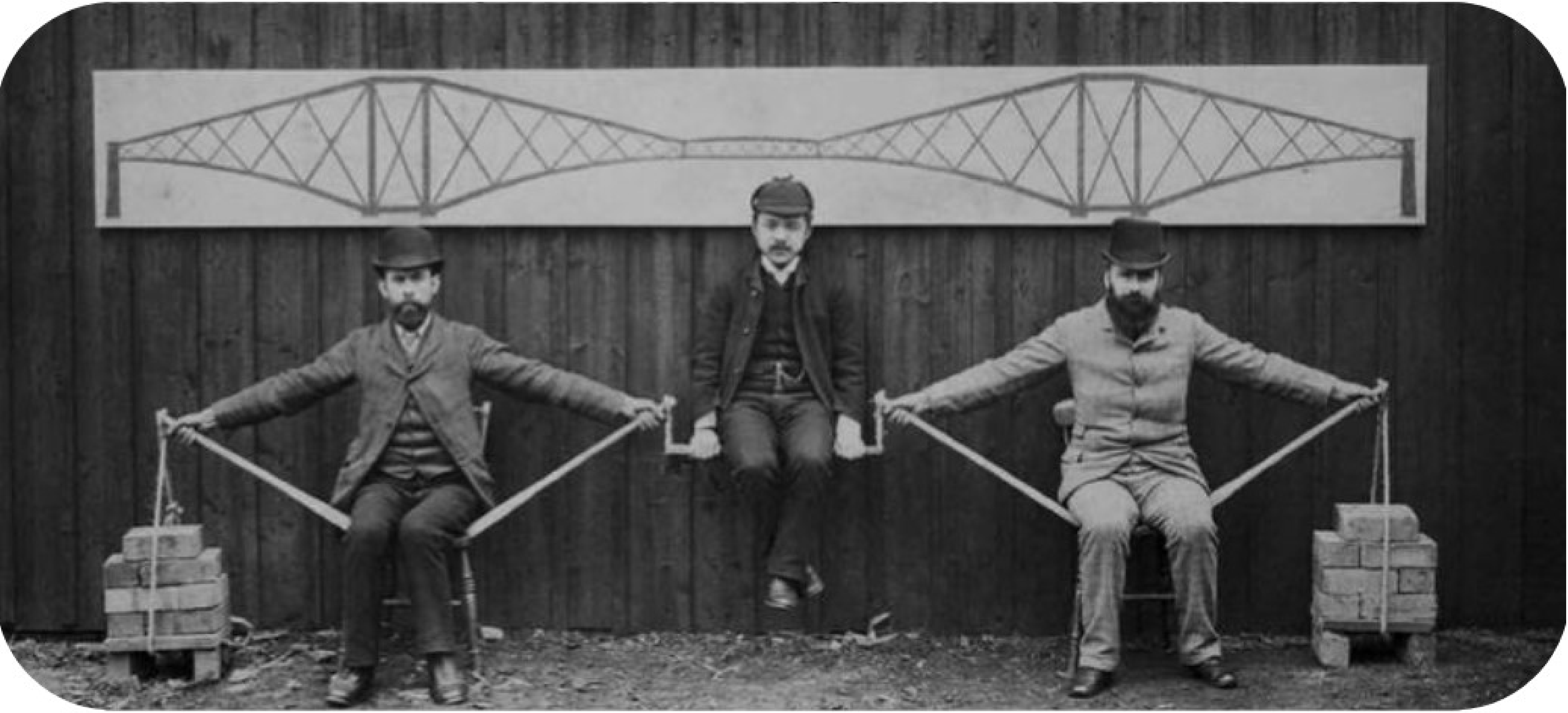
041R - ANALISI DELLE STRUTTURE

prima struttura importante in acciaio
4 torri (104m di altezza)



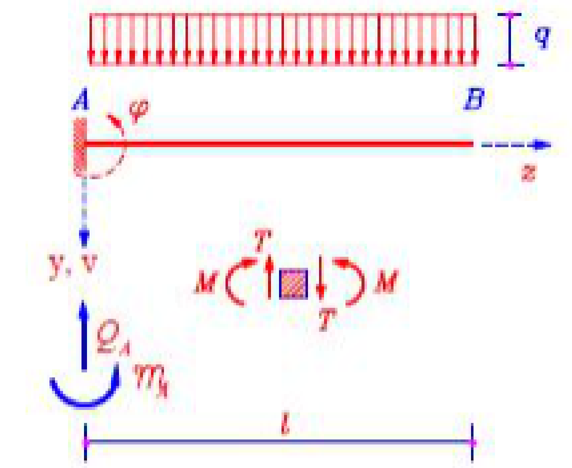
1890 Firth of Forth Bridge (Scozia) - 2528m



1890 Firth of Forth Bridge (Scozia) - 2528m

SPOSTAMENTI E ROTAZIONI NOTEVOLI
di sistemi isostatici semplici

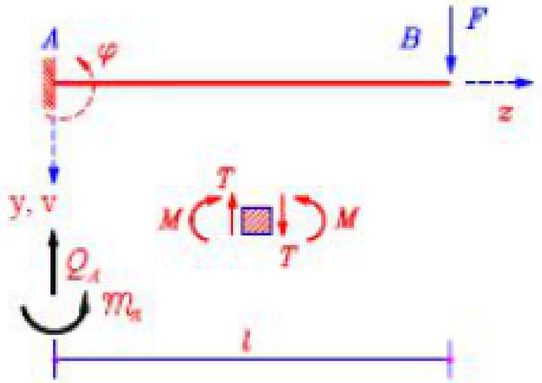
Mensola
Carico distribuito



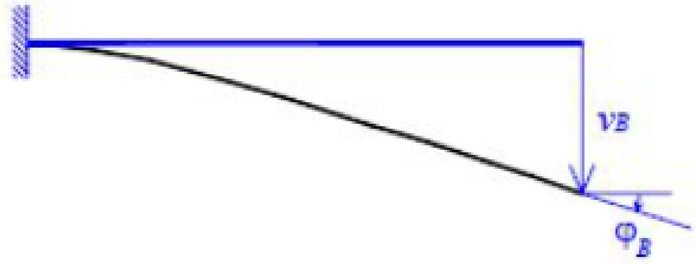
$$Q_A = q\ell \;; \quad \mathcal{M}_A = \frac{q\ell^2}{2}$$

$$v_B = \frac{q\ell^4}{8EI} \;; \quad \varphi_B = -\frac{q\ell^3}{6EI}$$

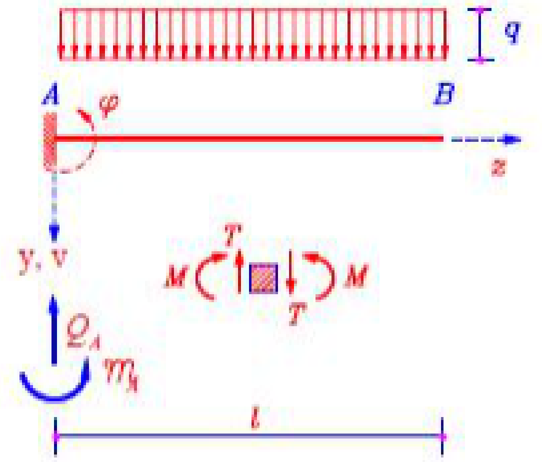
Mensola
Carico concentrato



$$Q_A = F \;; \quad \mathcal{M}_A = F\,\ell$$



$$v_B = \frac{F\ell^3}{3EI} \;; \quad \varphi_B = -\frac{F\,\ell^2}{2EI}$$

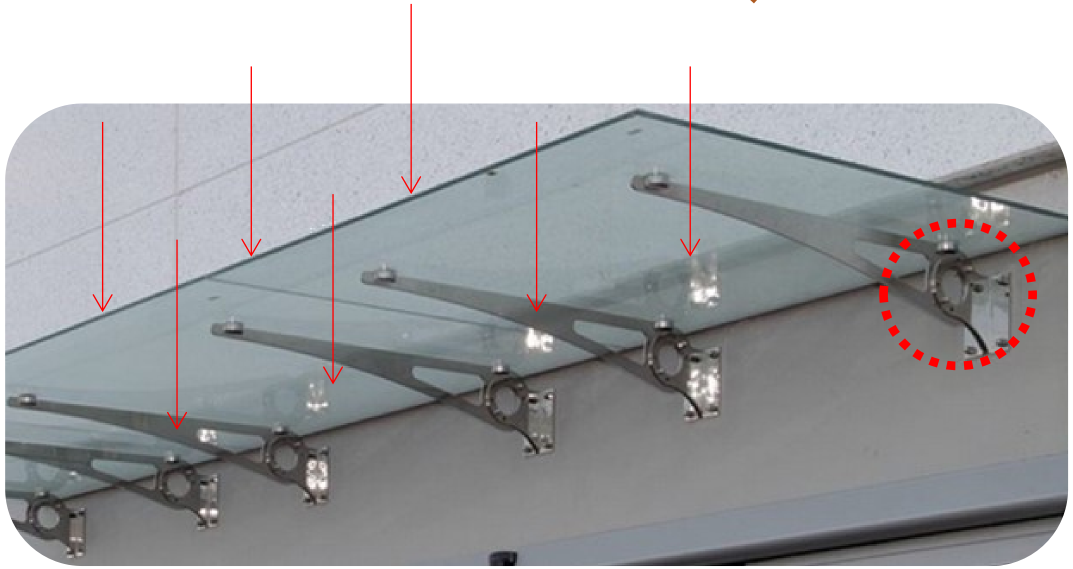


$$Q_A = q\ell\,; \quad m_A = \frac{q\ell^2}{2}$$

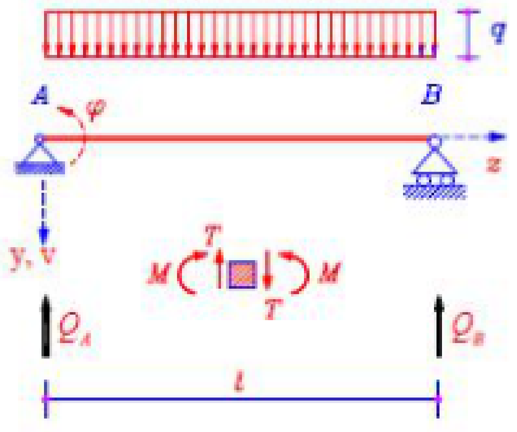
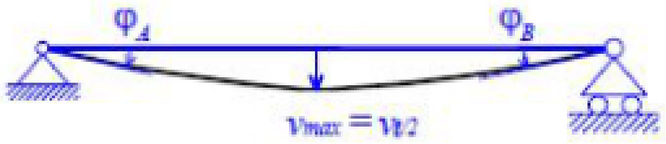
$$v_B = \frac{q\ell^4}{8EI}\,; \quad \varphi_B = -\frac{q\ell^3}{6EI}$$

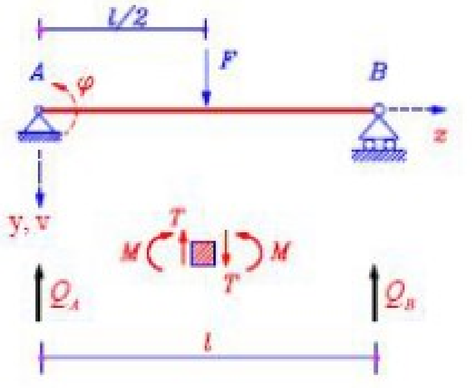
Mensola

Carico distribuito

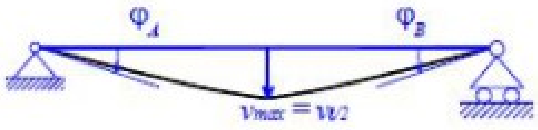


SPOSTAMENTI E ROTAZIONI NOTEVOLI
di sistemi isostatici semplici

SCHEMA DI CARICO E VINCOLO	LINEA ELASTICA
 $Q_A = Q_B = \frac{q\ell}{2}$	 $v_{\ell/2} = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI} = 0.0130\frac{q\ell^4}{EI}$ $\varphi_B = -\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EI}$



$$Q_A = Q_B = \frac{F}{2}$$



$$v_{\max} = v_{\ell/2} = \frac{F\ell^3}{48EI}$$

$$\varphi_B = -\varphi_A = \frac{F\,\ell^2}{16EI}$$

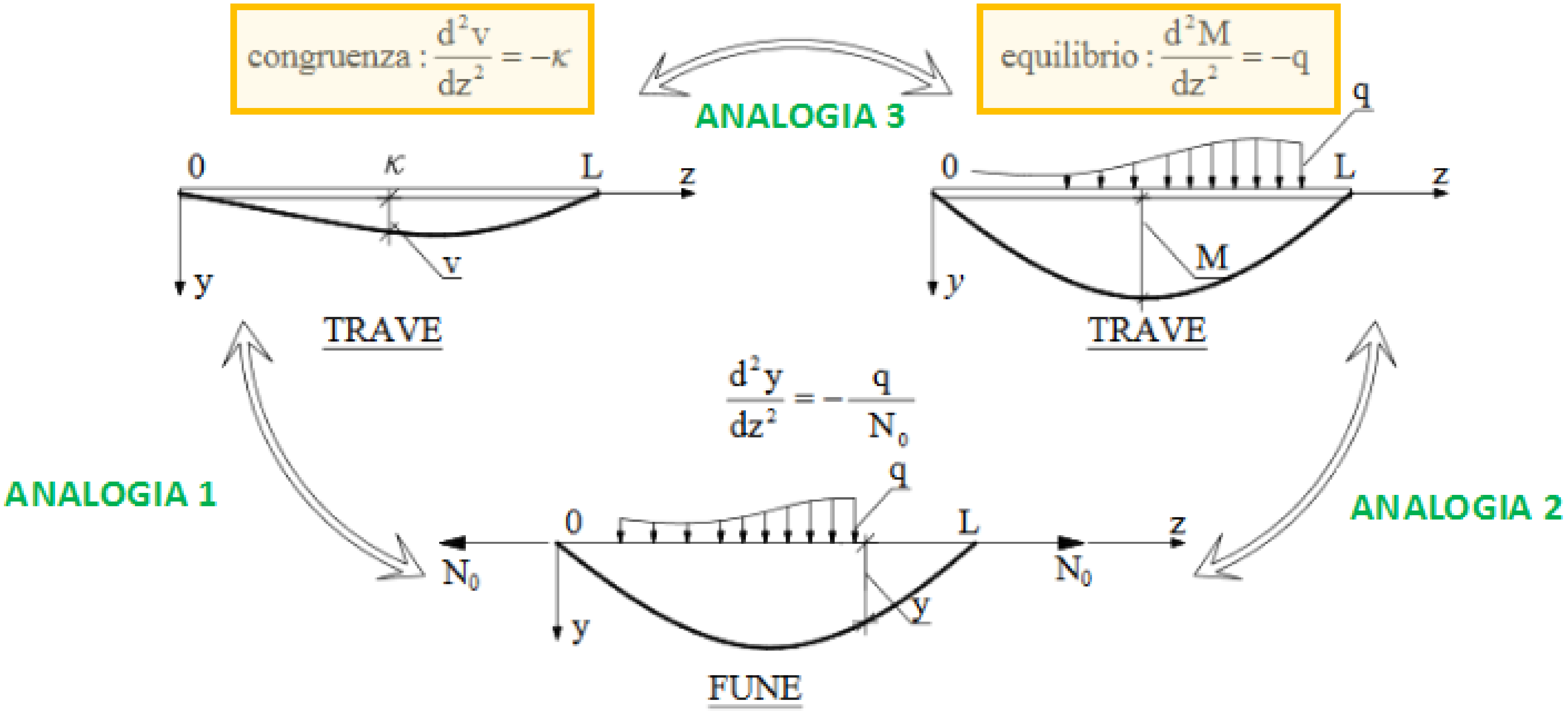
Trave appoggio-appoggio
Carico concentrato

SPOSTAMENTI E ROTAZIONI NOTEVOLI
di sistemi isostatici semplici

TEOREMA E ANALOGIE DI MOHR

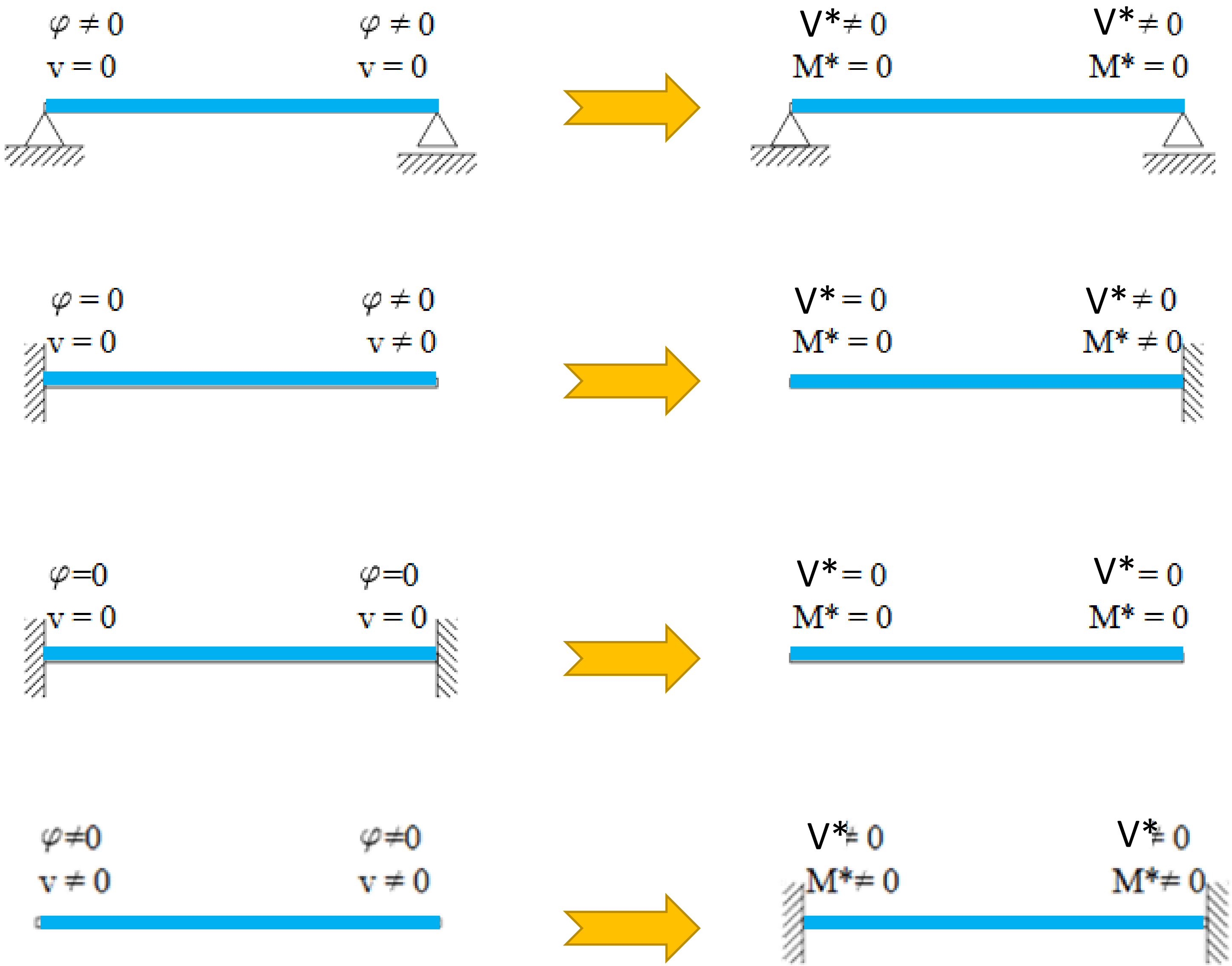
TEOREMA E ANALOGIE DI MOHR

La linea elastica di una trave avente curvatura $\kappa(z)$ è uguale al diagramma dei momenti flettenti di un'altra trave ("trave ausiliaria"), di uguale luce, con carico $q^* = \kappa$.



TEOREMA E ANALOGIE DI MOHR

TRAVE REALE | **TRAVE AUSILIARIA**

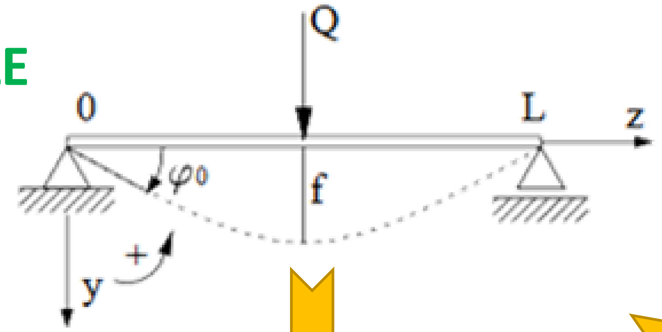


CONDIZIONI AL CONTORNO

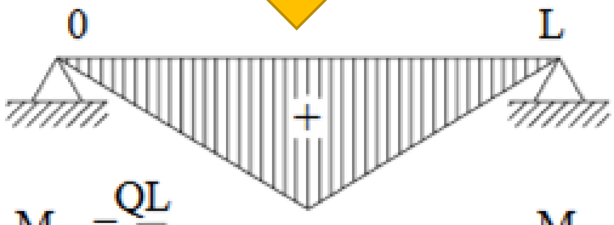
TEOREMA E ANALOGIE DI MOHR

ESEMPIO 1

TRAVE REALE



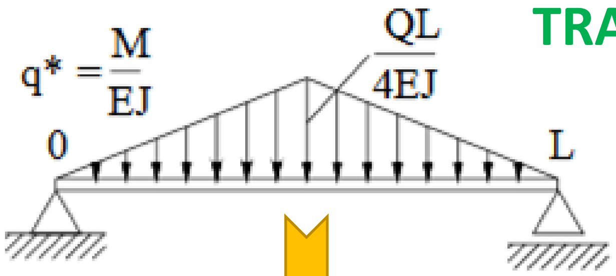
$EJ = cost \; ; \quad \kappa = \dfrac{M}{EJ}$

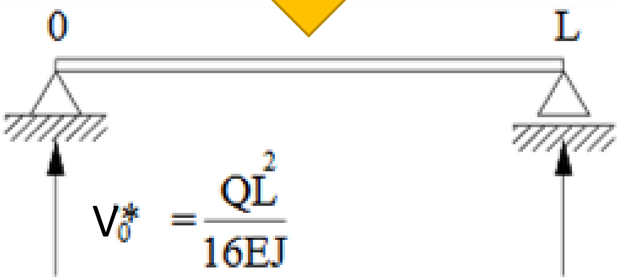


$M_{MAX} = \dfrac{QL}{4}$

TRAVE AUSILIARIA

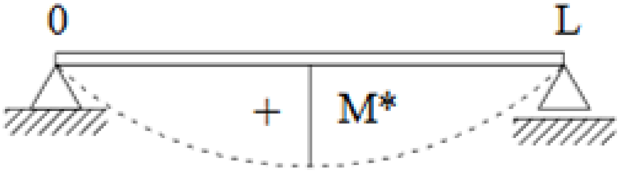
$q^* = \dfrac{M}{EJ}$





$V_0^* = \dfrac{QL^2}{16EJ}$

$\left(V_0^* = \dfrac{QL}{4EJ} \, \dfrac{L}{4} = \dfrac{QL^2}{16EJ} \right)$



$M_0^*\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{QL^3}{48EJ}$

$\left(M^*\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{QL^2}{16EJ} \, \dfrac{L}{2} - \dfrac{QL}{4EJ} \, \dfrac{L}{4} \, \dfrac{L}{6} = \dfrac{QL^3}{48EJ} \right)$

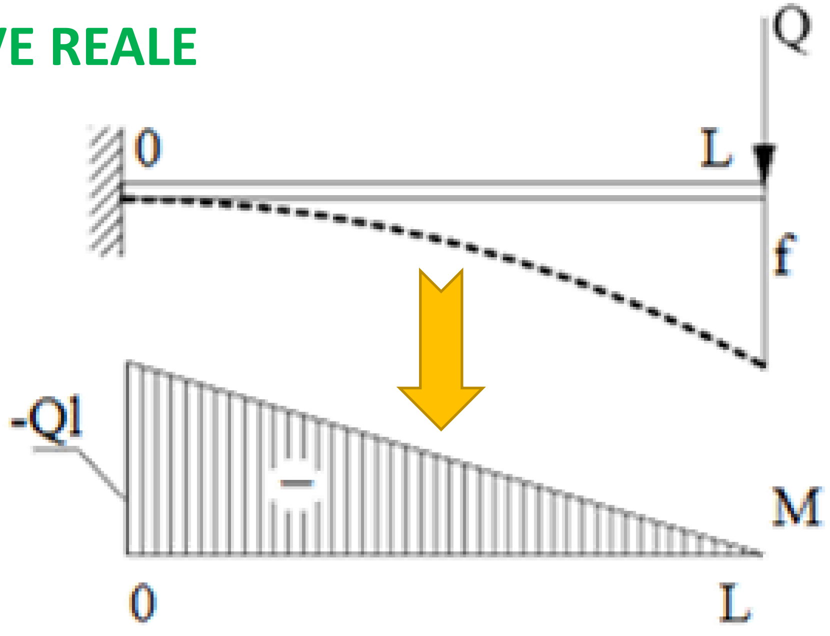
$\varphi_0 = -y'_0 = -V_0^* = -\dfrac{QL^2}{16EJ}$

$\boxed{f = M_0^*\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{QL^3}{48EJ}}$

TEOREMA E ANALOGIE DI MOHR

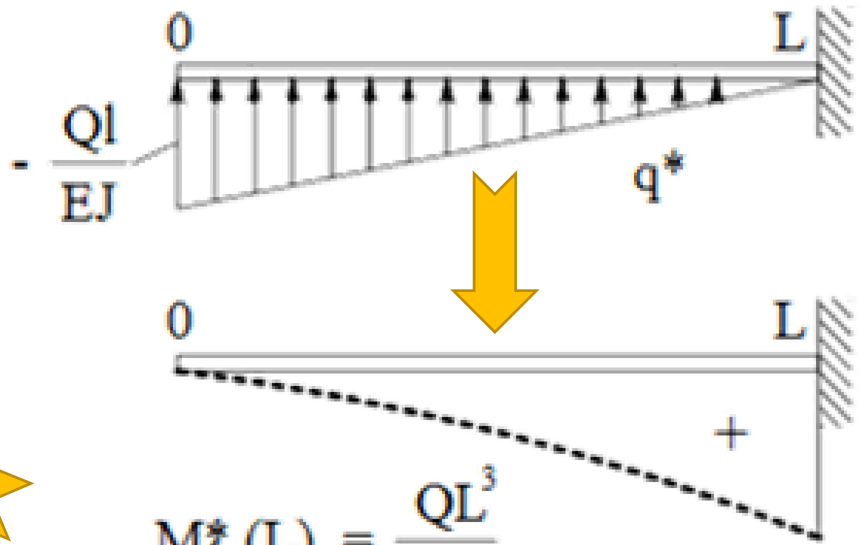
ESEMPIO 2

TRAVE REALE



$$EJ = \text{cost} \; ; \qquad \kappa = \frac{M}{EJ}$$

TRAVE AUSILIARIA



$$M^*_0(L) = \frac{QL^3}{3EJ}$$

$$\left(M^*_0(L) = \frac{QL}{EJ}\,\frac{L}{2}\,\frac{2}{3}\,L = \frac{QL^3}{3EJ} \right)$$

$$\boxed{f = M^*_0(L) = \frac{QL^3}{3EJ}}$$

METODO
DELLA LINEA ELASTICA

??

METODO DELLE FORZE

METODO
DELLE RIGIDEZZE

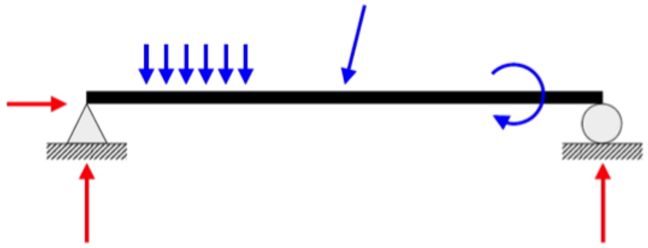
??

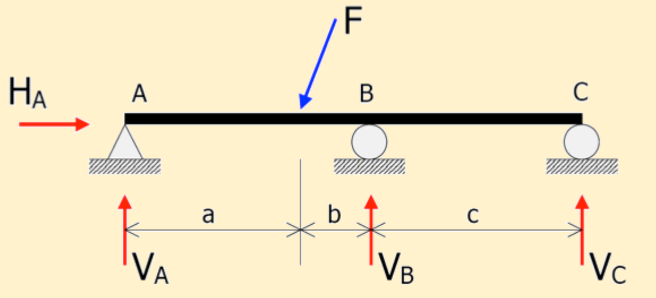
....

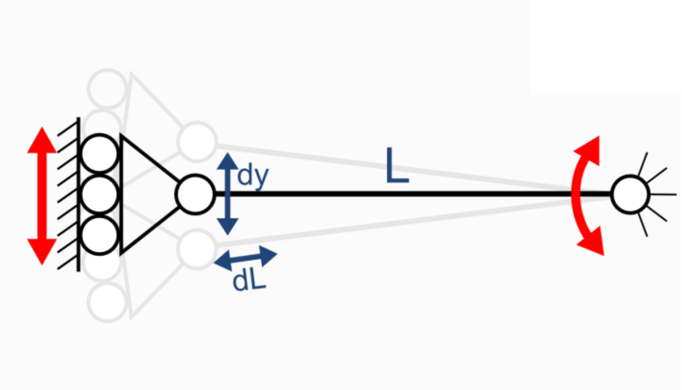
….E PER LE STRUTTURE IPERSTATICHE?

METODO DELLE FORZE

STRUTTURE IPERSTATICHE







SISTEMA ISOSTATICO

Nel sistema isostatico a qualsiasi valore dei carichi esterni sono associate reazioni vincolari che rendono il sistema **equilibrato** e i vincoli sono strettamente sufficienti a impedire ogni possibile moviemento.

GdV=GdL

SISTEMA IPERSTATICO

Nel sistema iperstatico i vincoli sono sovrabbondanti e i possibili movimenti del sistema sono sempre impediti. La struttura in questo caso risulta essere eccessivamente vincolata.

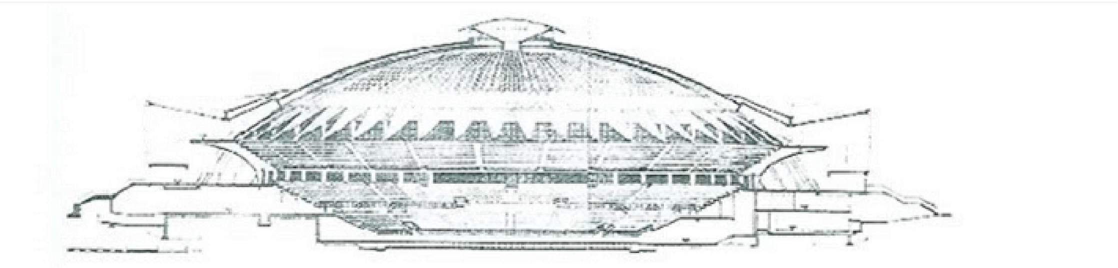
GdV > GdL

SISTEMA LABILE

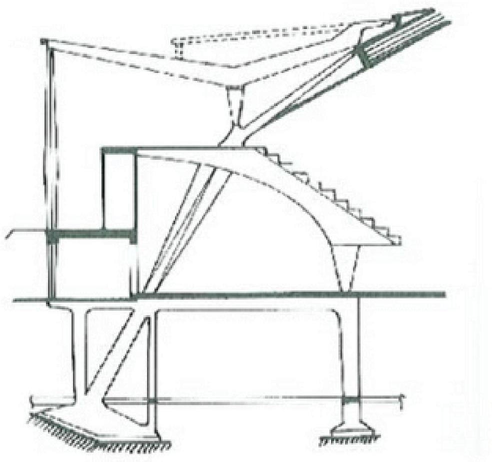
Nel sistema labile i vincoli applicati, sono insufficienti a impedire tutti i possibili movimenti del sistema e la struttura non è in equilibrio.

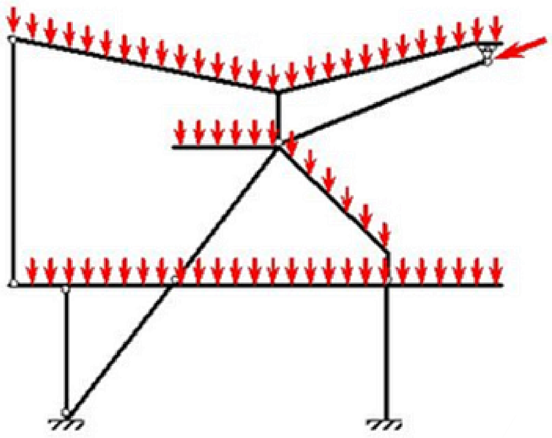
GdV < GdL

SISTEMI IPERSTATICI



Le strutture iperstatiche hanno il vantaggio di avere in qualche modo una **riserva aggiuntiva**, se comparate a quelle isostatiche, nei confronti della 'resistenza' alla labilità (cioè allo sviluppo di un meccanismo di collasso)





Le strutture iperstatiche, essendo dotate di un **numero sovrabbondante di vincoli**, in generale non possono essere considerate più affidabili, ma richiedono **metodi di calcolo specifici**

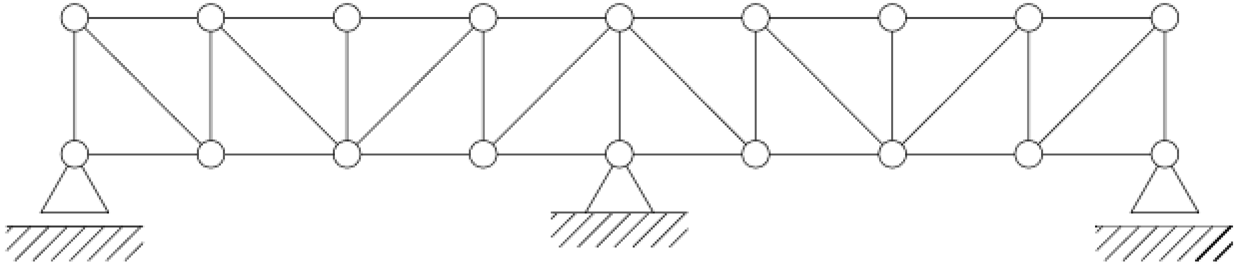
La **notevole rigidezza** delle strutture iperstatiche risulta anche **penalizzante**, dato che può dare origine ad azioni interne anche di notevoli entità

Le strutture iperstatiche sono inoltre **sensibili alle variazioni termiche o ai cedimenti** (ad esempio i cedimenti differenziali di fondazione), fenomeni dai quali nascono ulteriori **sollecitazioni interne** (azione assiale, momento o taglio)

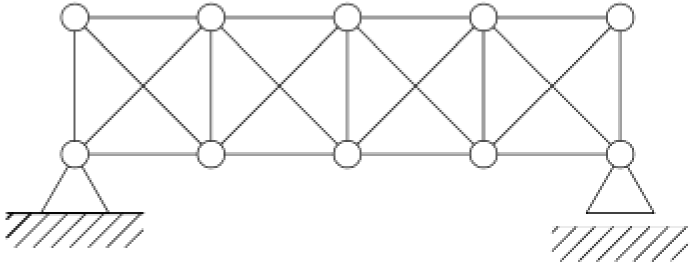
SISTEMI IPERSTATICI

Esempio: travature reticolari iperstatiche, a causa di

1) sovrabbondanza di vincoli esterni

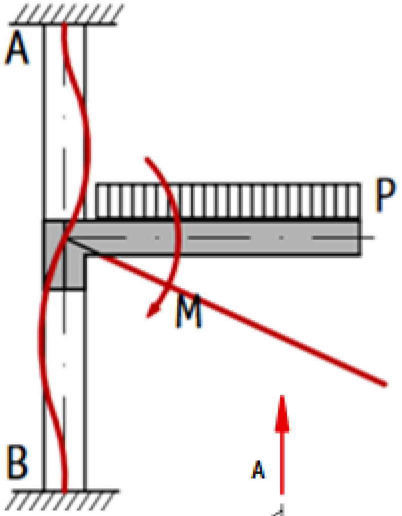


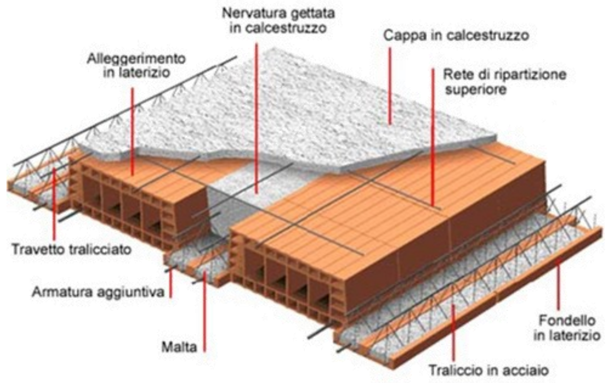
2) sovrabbondanza di aste

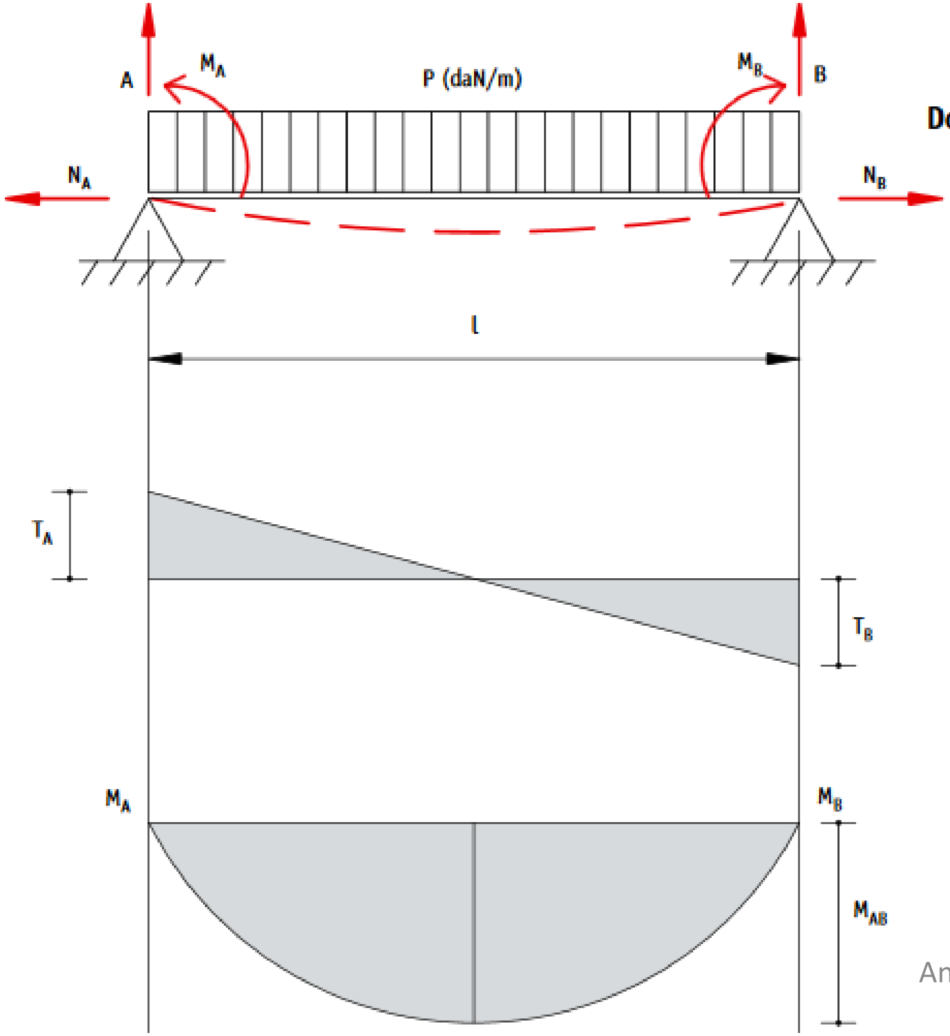


SISTEMI IPERSTATICI

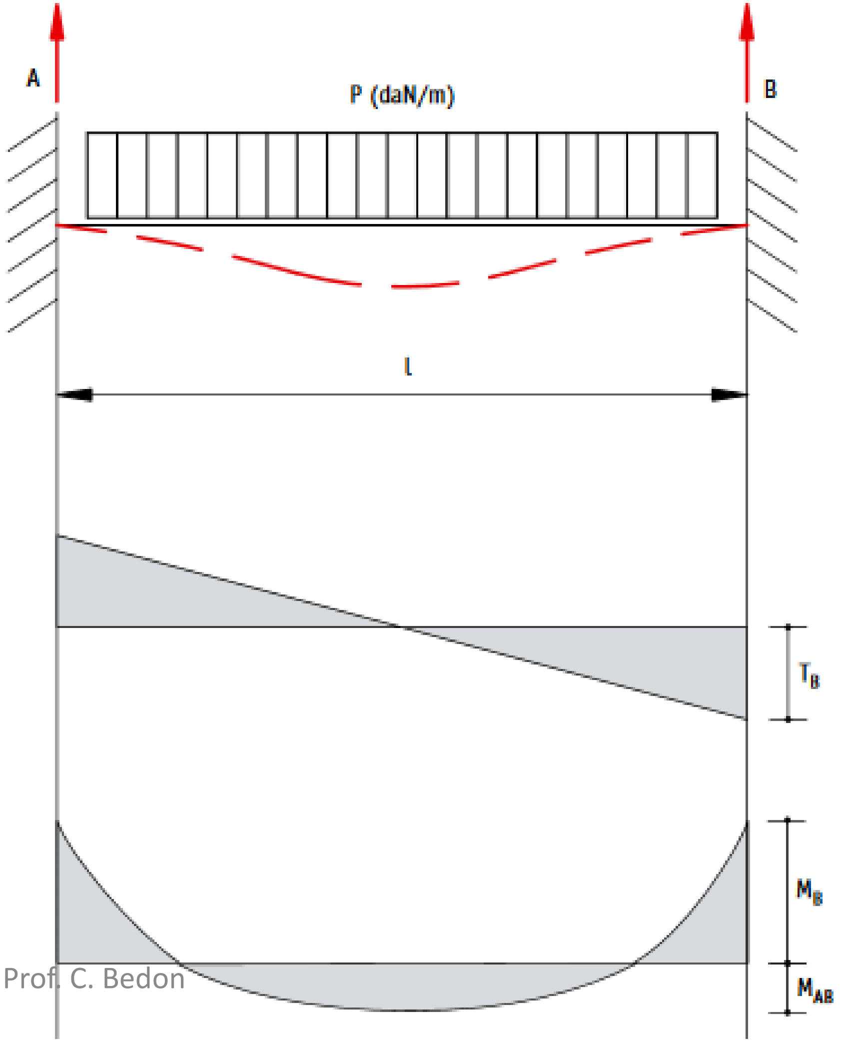
Esempio: solaio







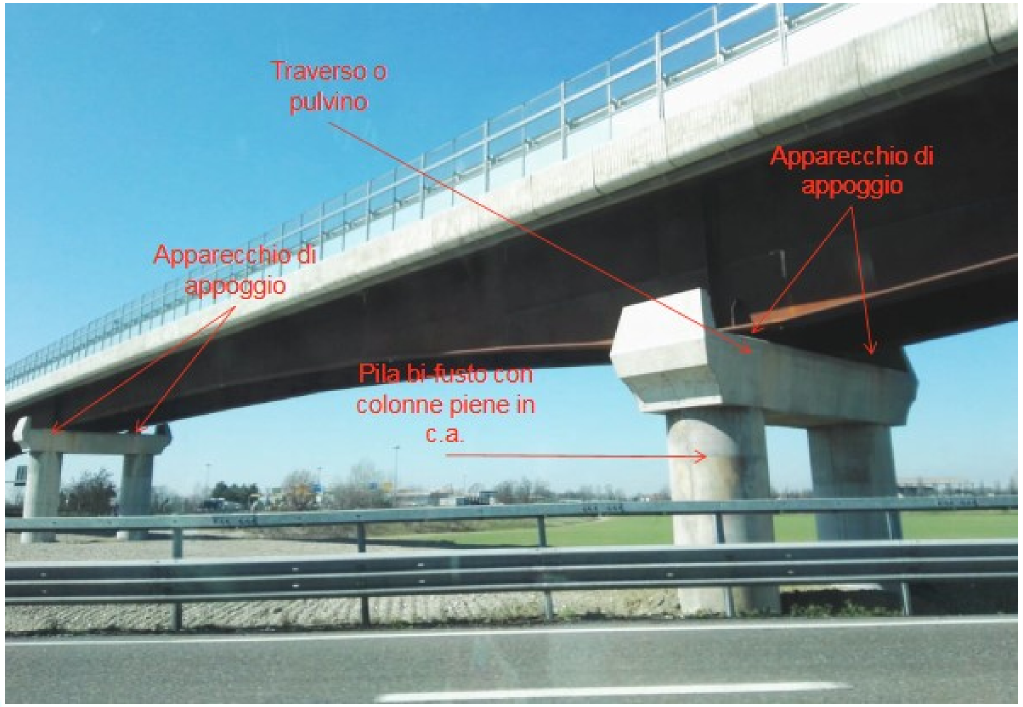
Doppio appoggio



Doppio incastro

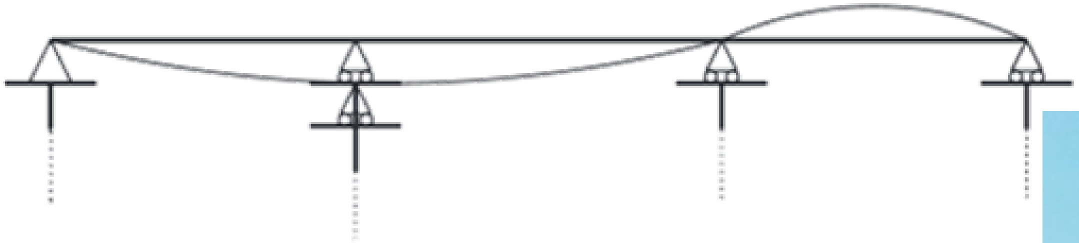
SISTEMI IPERSTATICI

Esempio: ponti a trave continua



VANTAGGI

- Sfruttamento del materiale
- Schema iperstatico: maggior resistenza in campo plastico ("ridondanza")
- Limitazione dei giunti



SVANTAGGI

- Schema iperstatico: insorgere di sollecitazioni (autotensioni) per
  - cedimenti differenziali tra le pile
  - effetti termici
  - ritiro
  - viscosità
- Maggior difficoltà di calcolo

METODO DELLE FORZE

- ✓ Il metodo delle forze è uno dei possibili metodi per la risoluzione di strutture iperstatiche, e si adatta perfettamente al caso di strutture iperstatiche composte da travi
- ✓ Esso consiste primariamente nel **porre come incognite del problema alcune reazioni vincolari** (di vincoli interni o esterni, talvolta azioni di contatto in una sezione), il cui numero è pari al grado di iperstaticità della struttura in esame.
- ✓ Definite queste incognite senza “labilizzare” la struttura di partenza, il metodo procede, tramite applicazione del **principio di sovrapposizione degli effetti**, nella determinazione delle equazioni che ci consentono di determinare il valore delle suddette incognite.
- ✓ Queste equazioni sono di **compatibilità cinematica**: la scelta di rappresentare qualche grado di vincolo tramite la reazione (forza o coppia) corrispondente, equivale all'eliminazione di alcuni vincoli cinematici che devono essere ripristinati affinché il sistema isostatico che si sta studiando corrisponda al sistema iperstatico di partenza.
- ✓ L’applicazione del metodo prevede:

  1) la scelta di una struttura isostatica di riferimento e l’individuazione delle incognite iperstatiche;

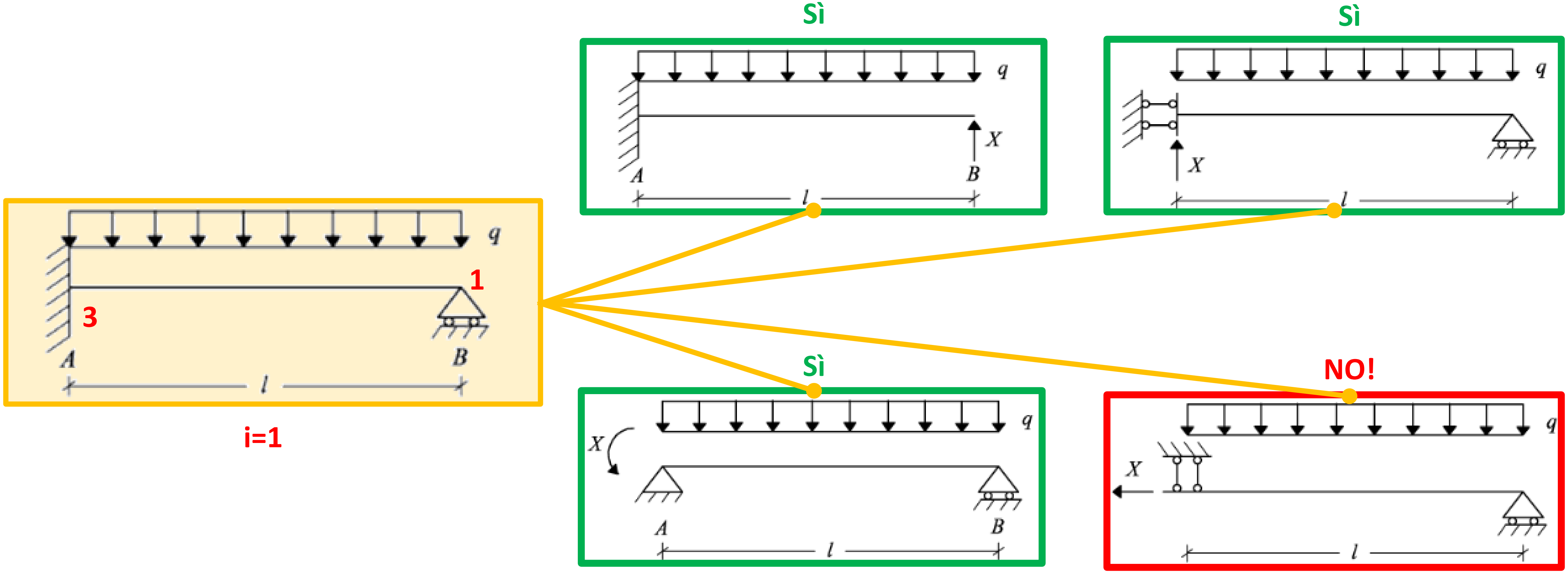
  2) la scrittura delle equazioni di compatibilità cinematica che ripristinino i vincoli cinematici soppressi dalla trasformazione del vincolo cinematico in forza (reazione vincolare);

  3) la risoluzione del sistema di equazioni per la determinazione delle incognite iperstatiche;

  4) la sistematica applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti per la determinazione delle azioni di contatto sulla struttura iperstatica

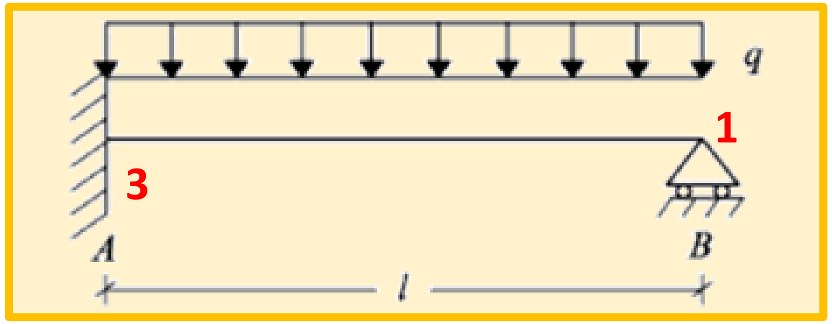
METODO DELLE FORZE

✓ Ad una struttura iperstatica possono in realtà corrispondere **tante strutture isostatiche di riferimento**, ognuna relativa ad una scelta differente dell'incognita iperstatica iperstatica. Tuttavia, tale scelta potrebbe risultare anche errata, rendendo labile la struttura di partenza:

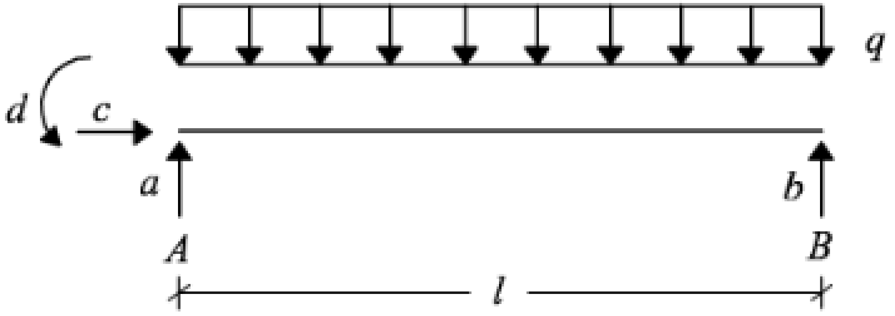


METODO DELLE FORZE: passaggi

✓ Dato il sistema iperstatico in figura, mettendo in evidenza le reazioni vincolari ed impostando le equazioni cardinali della statica si ottiene:



i=1

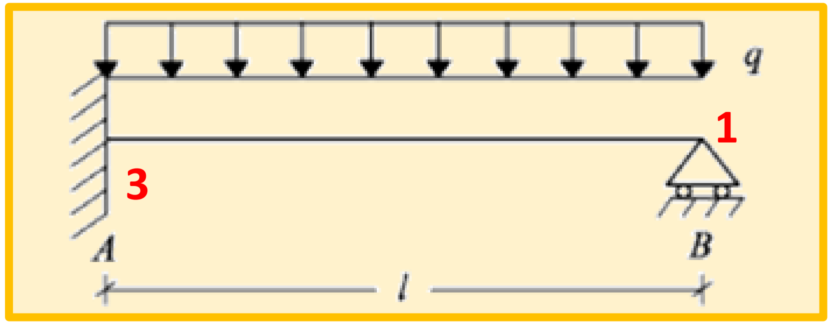


$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b = ql \\ d + bl - \dfrac{ql^2}{2} = 0 \end{cases}$$

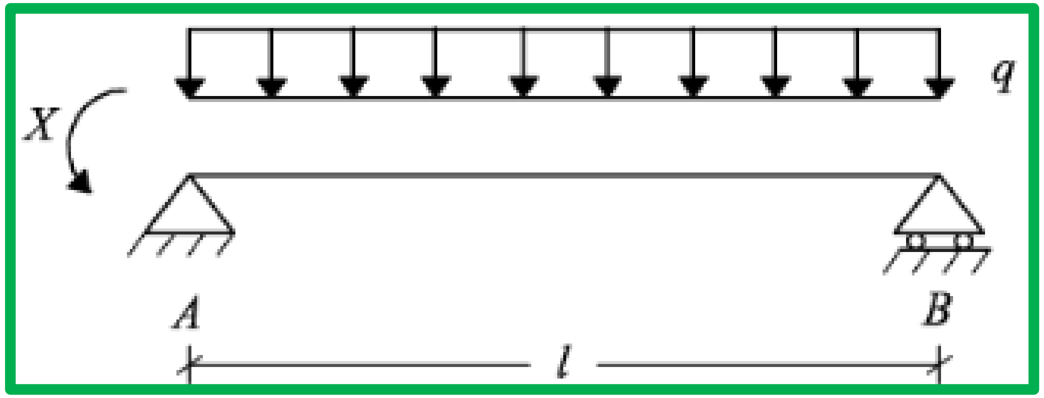
✓ **Le equazioni così definite non ammettono un'unica soluzione:**

difatti, ci troviamo di fronte ad un sistema algebrico di tre equazioni e quattro incognite, dunque manca un'equazione per determinare la soluzione del problema dell'equilibrio.
Questa equazione aggiuntiva non potrà essere di equilibrio,
ma avrà un altro significato meccanico.

METODO DELLE FORZE: passaggi



i=1



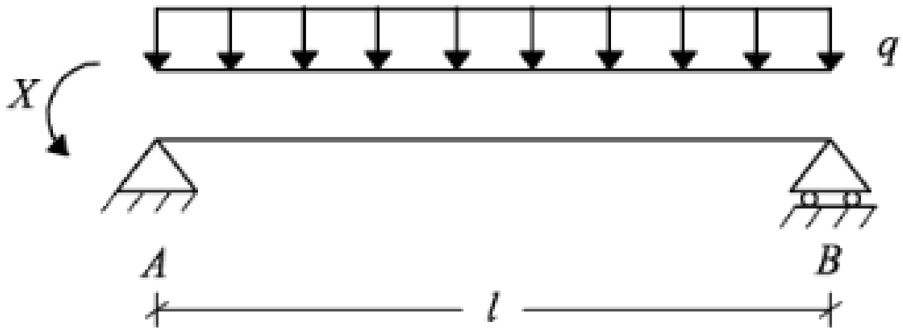
Primo passo: scegliere la struttura isostatica di riferimento

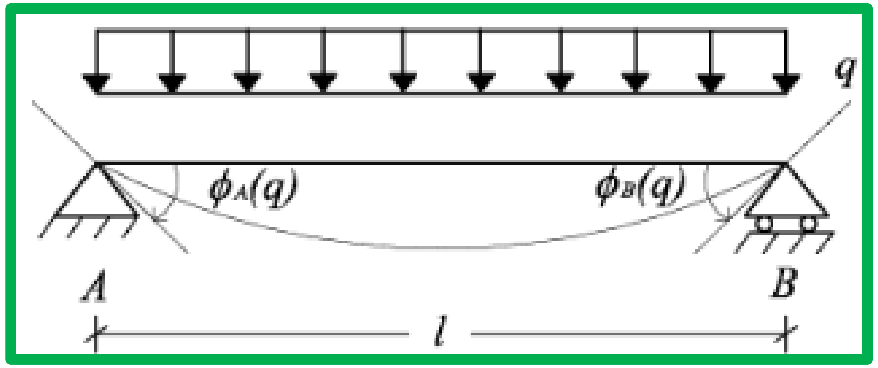
Associamo alla struttura iperstatica di partenza lo schema isostatico di riferimento riportato in figura, dove il vincolo originale di incastro viene parzialmente rappresentato in termini cinematici (cerniera) + tramite una parte della sua reazione vincolare (la coppia X, incognita).

Se rimaniamo confinati nelle equazioni cardinali della statica, ossia se vediamo la struttura come un corpo rigido, tutti i valori di X sono possibili. Ma c'è un solo valore di X che tiene conto dell'effettiva deformabilità della struttura e dell'effettivo funzionamento cinematico dei vincoli. Si tratta quindi di trovare quel valore.

A tal fine, è necessario introdurre aspetti legati alla deformabilità della struttura a partire dai quali potremoscrivere l'equazione mancante e determinare univocamente il valore di X.

METODO DELLE FORZE: passaggi





Secondo passo: valutare l'effetto cinematico provocato dai carichi attivi sulla struttura isostatica

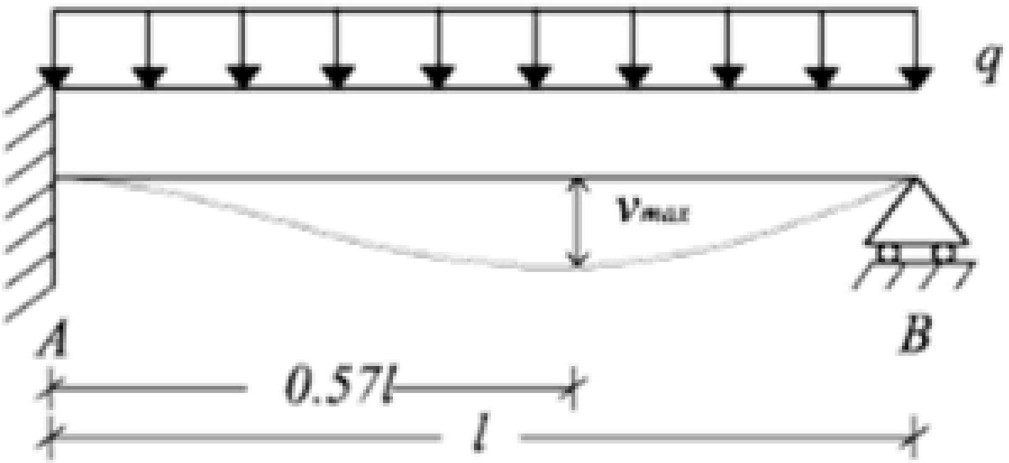
Valutiamo adesso come si deformerebbe la struttura isostatica per effetto del solo carico esterno di natura attiva, ossia, in questo caso, della densità di carico q

Le sezioni della trave corrispondenti ai punti A e B subirebbero rispettivamente le due rotazioni $\varphi_A(q)$ e $\varphi_B(q)$, i cui valori possono essere determinati tramite integrazione della linea elastica.

METODO DELLE FORZE: passaggi

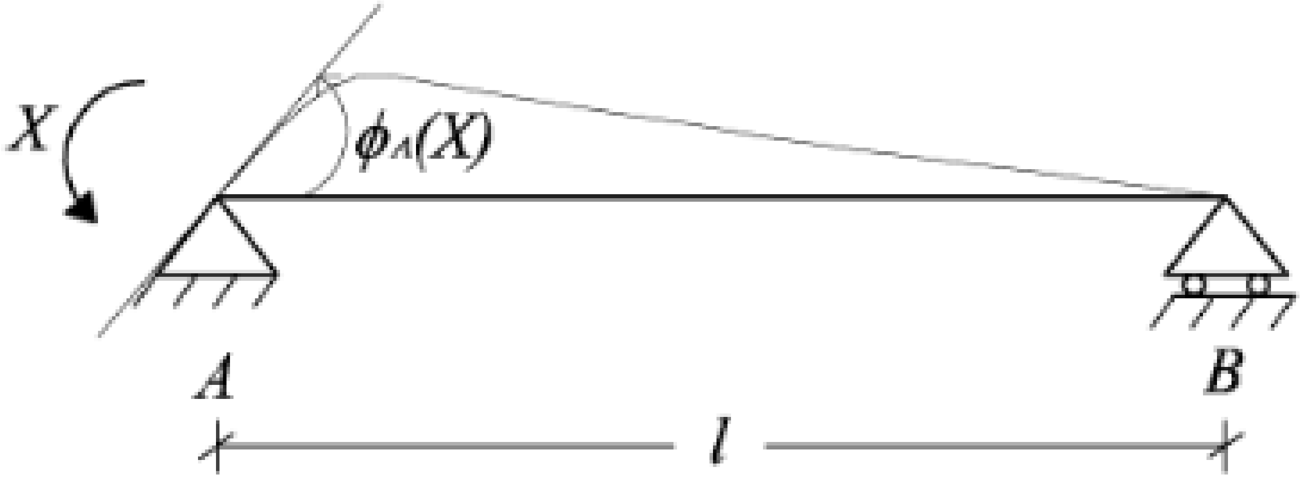
Terzo passo: imporre la congruenza della deformazione e determinare il valore dell'incognita(e) iperstatica(e)

La rotazione nel punto A, tuttavia, è puramente ipotetica. Difatti, non possiamo dimenticare che l'operazione che ci ha consentito di selezionare una struttura isostatica di riferimento è solo un cambiamento di rappresentazione e che in A c'è un vincolo di incastro perfetto. Tale vincolo di incastro impedisce che avvengano spostamenti e rotazioni:



Questo significa che la reazione vincolare iperstatica X produce, nella sezione in cui è applicata, un effetto cinematico opposto all'effetto dei carichi attivi nella medesima sezione, per ripristinare l'azione del vincolo.

METODO DELLE FORZE: passaggi



Perché questo avvenga è necessario che la rotazione totale nel punto A, somma per sovrapposizione degli effetti delle rotazioni dovute rispettivamente alla densità di carico $\varphi_A(q)$, ed all'incognita iperstatica $\varphi_A(X)$, sia zero. Analiticamente questa equazione si esprime con un'equazione detta "di compatibilità cinematica":

$$\varphi_A := \varphi_A(X) + \varphi_A(q) = 0$$

METODO DELLE FORZE: passaggi

A questo punto, si rimanda a risultati noti in termini di rotazioni (determinabili una volta per tutte, ad esempio, con l'equazione della linea elastica):

$$\boxed{\varphi_A(X) = \frac{Xl}{3EJ}}$$

analisi dimensionale: $\varphi_A(X) = \dfrac{[F]\cdot[L]\cdot[L]}{\dfrac{[F]}{[L]^2}\cdot[L]^4} =$ numero puro

$$\boxed{\varphi_A(q) = -\frac{ql^3}{24EJ}}$$

analisi dimensionale: $\varphi_A(q) = \dfrac{\dfrac{[F]}{[L]}\cdot[L]^3}{\dfrac{[F]}{[L]^2}\cdot[L]^4} =$ numero puro

che, sostituiti nell'equazione di compatibilità cinematica, la trasformano in:

$$\boxed{\frac{Xl}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = 0}$$

METODO DELLE FORZE: passaggi

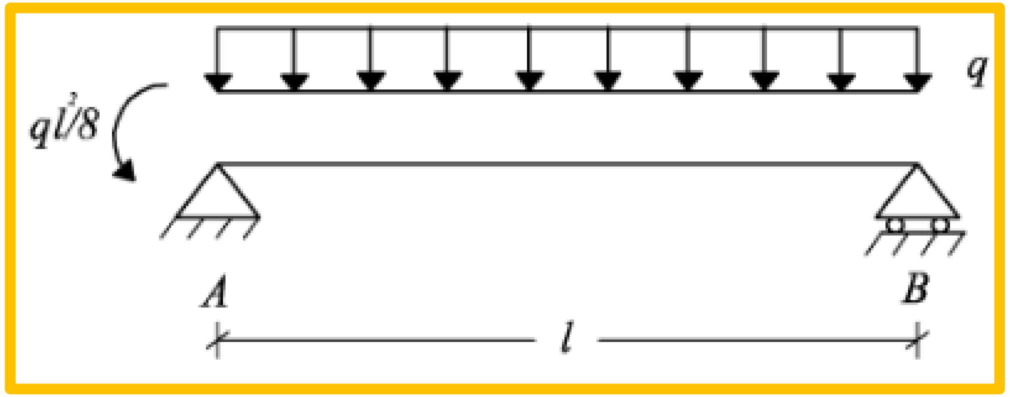
$$\frac{Xl}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = 0$$

Da questa si ricava il valore dell' incognita iperstatica X

$$\boxed{X = \frac{ql^2}{8}}$$

Quarto passo : *determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni sulla struttura iperstatica*

A questo punto è possibile determinare i diagrammi delle sollecitazioni sulla struttura iperstatica, come somma degli effetti dovuti alla densità di carico e alla coppia X.



La soluzione finale è ottenuta per sovrapposizione degli effetti