Cor: sia $A \in M_n(K)$, allora $\det A = \det {}^tA$

Dim: $\det {}^tA$ = sviluppo secondo la prima riga di ${}^tA$

= sviluppo secondo la prima colonna di A

$= \det A$

Oss: per comprendere che segno assegnare a ciascun addendo in uno sviluppo di Laplace, notiamo che il segno di $(-1)^{i+j}$ è:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & \ddots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Teorema: (teorema di Binet)

siano $A, B \in M_n(K)$, allora

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Cor: sia $A \in M_n(K)$ invertibile (dunque $\det A \neq 0$), allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det A)^{-1}$$

Dim: per definizione $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$, pertanto per il teorema di Binet

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

e dunque

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$$

$$\Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Concludiamo questa parte con una formula simbolica che esprime l'inversa di una matrice.

Def: sia $A \in M_n(K)$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$; il __cofattore__ ij-__esimo__ di A è lo scalare (ovvero, l'elemento di K)

$$(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è il minore ij-esimo di A; definiamo la __matrice dei cofattori__ di A come quella matrice il cui elemento ij-esimo è l'ij-esimo cofattore di A; denotiamo la matrice dei cofattori con $\mathrm{cof}(A)$.

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

cofattore di posto $(1,1)$: $(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} = 4$

" " " $(1,2) = (-1)^{1+2} \cdot \det A_{12} = -1$

" " " $(2,1) = (-1)^{2+1} \cdot \det A_{21} = -3$

" " " $(2,2) = (-1)^{2+2} \cdot \det A_{22} = 2$

Prop: sia $A \in M_n(K)$, allora

$$A \cdot {}^t\mathrm{cof}(A) = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n \qquad \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \ddots \ \det A \end{pmatrix}$$

in particolare se A è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{cof}(A)$$

Applicazioni lineari

Def: siano V e V' due spazi vettoriali su K; una funzione

$$f : V \longrightarrow V'$$

si dice una __applicazione lineare__ se valgono:

AL1. (additività)

$\forall v_1, v_2 \in V$, vale

$$\underbrace{f(v_1 + v_2)}_{\text{somma in } V} = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{somma in } V'}$$

"l'immagine della somma è la somma delle immagini"

AL2. (omogeneità)

$\forall v \in V$ e $\forall \lambda \in K$, vale

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

moltiplicazione di un vettore di V per uno scalare di K — moltiplicazione di un vettore di V' per uno scalare di K.

"l'immagine della moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione per uno scalare dell'immagine".

Esempio: consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + 2y$$

vale che

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

quindi f è additiva; analogamente si dimostra che f è omogenea e dunque f è una applicazione lineare.

Esercizio: trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ che __non__ sia lineare.

Prop: sia $f : V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare, allora

$$f(0) = 0$$

elemento neutro di V — elemento neutro di V'

Dim: vale che

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

sommo $-f(0)$ a entrambi i membri, ottenendo

$$0 = f(0)$$

Def: sia $A \in M_{m,n}(K)$; allora A definisce una funzione

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$v \longmapsto A \cdot v$$

Prop: $\forall A \in M_{m,n}(K)$, la funzione L_A è un'applicazione lineare.

Dim: siano $v_1, v_2 \in K^n$, allora

$$L_A(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2)$$

$$= A \cdot v_1 + A \cdot v_2$$

$$= L_A(v_1) + L_A(v_2)$$

quindi L_A è additiva; analogamente si mostra che per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $v \in K^n$, vale $L_A(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L_A(v)$, ovvero che L_A è omogenea; pertanto L_A è lineare.

Esempio: (rotazione nel piano di un angolo α in senso antiorario)

sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e definiamo la matrice

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

l'applicazione lineare $L_{R_\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è la rotazione di angolo α in senso antiorario:

$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$L_{R_\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$