Appunti del corso di Istituzioni di Matematica

Prof.ssa Rodica Toader

Università degli Studi di Trieste, CdL STAN, a.a. 2024/2025

I numeri complessi

Aggiungiamo all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali un elemento, che indicheremo con i. Esso ha la proprietà

$$i^2 = -1\,.$$

Chiameremo "numero complesso" un'espressione del tipo

$$a + ib\,.$$

L'insieme di questi nuovi numeri si chiama "campo complesso" e si indica con $\mathbb{C}$. In esso valgono tutte le normali regole algebriche che già conosciamo in $\mathbb{R}$. Ad esempio, dati due numeri complessi $z = a + ib$ e $z' = a' + ib'$, possiamo scrivere

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + a' + ib + ib' = (a + a') + i(b + b')\,,$$

mentre

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a + ib) \cdot (a' + ib') \\ &= aa' + aib' + iba' + ibib' \\ &= aa' + i^2bb' + iab' + iba' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba')\,. \end{aligned}$$

Nel seguito, nel prodotto ometteremo spesso di scrivere il " $\cdot$ ".

Notiamo ora che il numero complesso $z = a+ib$ individua, ed è individuato, dalla coppia di numeri reali (a, b). Il numero a si dice "parte reale" di z e si scrive $a = \Re(z)$. Il numero b si dice "parte immaginaria" di z e si scrive $b = \Im(z)$. Possiamo quindi scrivere

$$(a, b) = a + ib\,.$$

Pertanto, l'insieme $\mathbb{C}$ si può identificare con l'insieme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}\,,$$

che spesso si indica con $\mathbb{R}^2$.

Si può pensare $\mathbb{C}$ come un'estensione di $\mathbb{R}$. Infatti, ogni numero reale a si può scrivere come $a + i \cdot 0$: esso ha parte reale uguale ad a e parte immaginaria uguale a 0.

Sia $z = a + ib$ un numero complesso fissato. Cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$u^2 = z\,.$$

Queste vengono talvolta dette "radici quadrate" del numero complesso z (attenzione però a non confonderle con la radice quadrata di un numero reale non negativo). Se $b = 0$, ho

$$u = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{se } a \geq 0\,, \\ \pm i\sqrt{-a} & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Se invece $b \neq 0$, scriviamo $u = x + iy$. Allora

$$x^2 - y^2 = a\,, \qquad 2xy = b\,.$$

Essendo $b \neq 0$, si ha $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Posso quindi scrivere $y = \frac{b}{2x}$, e ottengo

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0\,,$$

da cui

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\,.$$

Determinati così x e y, abbiamo due soluzioni della nostra equazione:

$$u = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2\,(a + \sqrt{a^2 + b^2}\,)}} \right].$$

Possiamo ora considerare un'equazione del secondo grado

$$Au^2 + Bu + C = 0\,,$$

dove A, B, C sono numeri complessi fissati, con $A \neq 0$. Come facilmente si vede, l'equazione è equivalente a

$$\left(u + \frac{B}{2A} \right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}\,.$$

Ponendo $v = u + \frac{B}{2A}$ e $z = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$, ci si riconduce al problema delle radici quadrate che abbiamo già risolto.

Per concludere, consideriamo l'equazione polinomiale più generale

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \ldots + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

dove $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sono numeri complessi fissati, con $A_n \neq 0$. In altri termini, vogliamo trovare le radici di un polinomio a coefficienti complessi. Il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrazione, è noto come **teorema fondamentale dell'algebra**.

Teorema. *Ogni equazione polinomiale ha, nel campo complesso, almeno una soluzione.*

Il problema di trovare una formula generale che fornisca le soluzioni è però tutt'altro che facile. Lo abbiamo affrontato nel caso $n = 2$ e si può risolvere anche se $n = 3$ o 4. Se $n \geq 5$, però, è stato dimostrato che non esiste alcuna formula algebrica generale che fornisca una radice del polinomio.

Introduciamo ora alcune nozioni associate ai numeri complessi. Se $z = a + ib$, si definisce il "modulo" di z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

Si noti che, se $z = a \in \mathbb{R}$, ritroviamo il "valore assoluto"

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0\,, \\ -a & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si introduce il numero $z^* = a - ib$, detto il "complesso coniugato" di z. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,; \\ (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\,; \\ z^{**} = z\,; \\ |z^*| = |z|\,; \\ zz^* = |z|^2\,; \\ \Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)\,, \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)\,; \end{gathered}$$

$$|\Re(z)| \leq |z|\,, \qquad |\Im(z)| \leq |z|\,.$$

Se $z \neq 0$, è

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}\,.$$

Sarà utile introdurre la *forma trigonometrica* di un numero complesso $z = a + ib$. Si tratta essenzialmente di scrivere il punto (a, b) in coordinate polari:

$$(a, b) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\,.$$

Qui $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il *modulo* di z, mentre l'angolo θ è l'*argomento* di z, determinato a meno di un multiplo intero di 2π. (Si osservi però che, se $z = 0$, l'argomento non è univocamente definito.) Scriveremo quindi

$$z = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)\,, \quad \text{oppure} \quad z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)\,.$$

Notiamo che, se scriviamo due numeri complessi come

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)\,, \qquad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)\,,$$

allora il loro prodotto si ottiene come

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

Vediamo quindi che il modulo di $z_1 z_2$ è il prodotto dei due moduli, mentre il suo argomento è la somma dei due argomenti.

In particolare, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\,,$$

e si può dimostrare per induzione che

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\,, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

In particolare, prendendo $\rho = 1$, troviamo la *Formula di De Moivre*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ora affrontiamo il seguente problema: dato un numero complesso z, trovare le soluzioni u dell'equazione

$$u^n = z\,.$$

(Qui $n \geq 2$ è un numero naturale.) Se $z = 0$, l'unica soluzione è $u = 0$, in quanto $|u|^n = |u^n| = |z| = 0$, per cui $|u| = 0$. Supponiamo ora $z \neq 0$ e scriviamo u e z in forma trigonometrica:

$$u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

per cui l'equazione diventa

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

ossia, facendo uso della formula di De Moivre,

$$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti, otteniamo

$$r^n = \rho\,, \quad n\varphi - \theta \in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Pertanto, otteniamo n soluzioni distinte, con

$$r = \sqrt[n]{\rho}\,, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\,,\ k = 0, 1, \dots, n-1\,,$$

per cui

$$u = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)\,,\ k = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Eulero si è posto il problema di trovare un'estensione della funzione esponenziale al campo complesso. Dato $z = a + ib$, si pone

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)\,.$$

Resta così definita la funzione *esponenziale complessa* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Osserviamo che, dati $z = a + ib$ e $z' = a' + ib'$, si ha

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= e^a(\cos b + i \sin b)e^{a'}(\cos b' + i \sin b') \\ &= e^a e^{a'}(\cos b + i \sin b)(\cos b' + i \sin b') \\ &= e^{a+a'}(\cos(b + b') + i \sin(b + b')) \\ &= e^{z+z'}\,. \end{aligned}$$

Ritroviamo quindi la proprietà fondamentale della funzione esponenziale: essa "manda somme in prodotti". Notiamo inoltre che ogni numero complesso z si potrà scrivere come

$$z = \rho e^{i\theta}\,,$$

dove $\rho \geq 0$ è il modulo e $\theta \in [0, 2\pi[$ è l'argomento di z .

Si noti che, scrivendo per $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x\,,$$

si trova che

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,.$$

Queste formule ricordano quelle che definiscono le funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

In questo contesto risulta più chiaro il legame di parentela che c'è tra queste funzioni.

Il fatto che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\,,$$

si può interpretare dicendo che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi i$. Questo fatto compromette la possibile definizione di una funzione "logaritmo" nel campo complesso: dato $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, l'equazione

$$e^u = z\,,$$

vista la periodicità della funzione esponenziale, presenta molteplici soluzioni. Precisamente, se scriviamo $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, il numero complesso $u = x + iy$ ne è soluzione se e solo se

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)\,,$$

ossia

$$x = \ln \rho \,, \quad y = \theta + 2\pi k \,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto,

$$e^u = z \quad \Leftrightarrow \quad u \in \{\ln |z| + i(Arg(z) + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\} \,.$$

Talvolta si interpreta il "logaritmo complesso" come una "funzione multivoca" che assume in questo caso infiniti valori, riservando il nome di "logaritmo principale" al particolare valore ottenuto scegliendo $k = 0$. Ad esempio, il logaritmo complesso del numero i assume tutti i valori dell'insieme

$$\left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Il logaritmo principale di i vale pertanto $\frac{\pi}{2} i$.