$$\mathrm{Hom}_K(\underset{\dim = m}{V}, \underset{\dim = n}{W}) \cong M_{n \times m}(K)$$

$\boxed{\text{Def}}$ [MATRICE che RAPPRESENTA $f: V \to W$ RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W]

$$\left.\begin{array}{l} f: V \to W \\ \dim(V) = m \\ \dim(W) = n \\ \mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_m\} \text{ di } V \\ \mathcal{C} := \{w_1, \dots, w_n\} \text{ di } W \\ f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

OVVERO ENTRAMBE FINITE

$f(v_m) = a_{1m} w_1 + \dots + a_{nm} w_m$

$f(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{n1} w_n$

PER DEFINIZIONE LA MATRICE CHE RAPPRESENTA f RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{B}$ di V E $\mathcal{C}$ di W.

VUOL DIRE CHE SI POSSONO LEGGERE LE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA **BASE $\mathcal{B}$ DI V** DIRETTAMENTE DALLE **COLONNE** DELLA MATRICE! (E **NON** DALLE RIGHE, QUI NON SONO PIÙ ALTERNATIVE)

In pratica:

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, phantom, "\in"] \arrow[rrr, bend left, "f"] \arrow[d, "f_B^{-1}"'] & V \arrow[rr, "f"] & & W \arrow[r, phantom, "\ni"] \arrow[d, "f_C", "\cong"'] & f(v) \arrow[d, "f_C"] \\
\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \arrow[rrrr, bend right, "L_{M^B_C(f)}"'] & K^m \arrow[u, "f_B^{-1}", "\cong"'] \arrow[rr, "L_{M^B_C(f)}"'] & & K^n & \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu
\end{tikzcd}
$$

SI DICE CHE IL DIAGRAMMA **COMMUTA**, CIOÈ FARE IL GIRO PASSANDO DA SOPRA O ANDANDO A DESTRA → □ PRODUCE LO STESSO RISULTATO.

START

COORDINATE DI $f(v)$ RISPETTO ALLA **BASE $\mathcal{C}$ di W**

COORDINATE DI v RISPETTO ALLA **BASE $\mathcal{B}$ di V**

$$L_{M^B_C(f)}(\lambda) = \left(f_C \circ f \circ f_B^{-1}\right)(\lambda)$$

TEOREMA BASE $\mathcal{B}=\{v_i\}_{i=1,\dots,m}$ BASE $\mathcal{C}=\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$

$$f: V \longrightarrow W$$

$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix}$ SONO LE COORDINATE DI v IN $\mathcal{B}$

i). Se $v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i \Rightarrow f(v)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i w_i$ dove le coordinate $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}$ di $f(v)$ nella base $\mathcal{C}$ sono ottenute tramite:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}$$

IN SOSTANZA I PUNTI i), ii), iii) CI DICONO CHE LAVORARE CON LE APPLICAZIONI LINEARI OPPURE CON LE MATRICI CHE LI RAPPRESENTANO È **LA STESSA COSA** [È LA STESSA QUANTITÀ DI INFORMAZIONI], UNA VOLTA CHE **LE BASI DI V e W** SONO **FISSATE**

ii). $\ker(f)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i \,\middle|\, M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix}=0\right\}$

$\operatorname{Im}(f)=\left\{\sum_{j=1}^{n}\mu_j w_j \,\middle|\, \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}\in \operatorname{Im}\left(\mathcal{L}_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}\right)\right\}$

PER DEFINIZ. $\operatorname{rank}(f)$ È $\dim(\operatorname{Im}(f))$

$\operatorname{rank}(f)=\operatorname{rank}\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)\right)$

QUINDI IL RANGO DI f È INDIPEND. DALLE BASI DI V e DI W SCELTE!

iii). $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}: \operatorname{Hom}(V,W)\xrightarrow{\cong} M_{n\times m}(K)$ ISO

$$f \longmapsto M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$$

e quindi $\dim(\operatorname{Hom}(V,W))=\dim(M_{n\times m}(K))=n\cdot m$

Dim.: i). $f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} \lambda_j a_{ij}\right) w_i$

e si conclude usando la definizione di prodotto riga per colonne

ii). Osserviamo che $f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

dal conto precedente, e di nuovo def. del prodotto, similmente per la seconda uguaglianza.

Per il rango:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{rank}(f) & & \mathrm{rank}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)) \\ \overset{\text{DEF}}{\parallel} & & \parallel \text{ DEF 1 DEL RANGO} \\ \dim(\mathrm{Im}(f)) & = & \dim(\mathrm{Im}(L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)})) \end{array}$$

$f_{\mathcal{C}}\big|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(L_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)})$

iii). **Claim:** $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)$ è lineare. Questo è vero perché se $f, g \in Hom(V, W)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g) = (b_{ij})_{i,j}$ allora $(f+g)(v_j) := f(v_j) + g(v_j) = \left(\sum_i a_{ij} w_i\right) + \left(\sum_i b_{ij} w_i\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_i (a_{ij} + b_{ij}) w_i$

e quindi $[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f+g)]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)]_{ij} + [M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)]_{ij}$ $\forall i,j$

nello stesso modo $[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(cf)]_{ij} = [c \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)]_{ij} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ applicaz. lineare

Claim: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)$ è iniettiva. Questo è vero perché se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = 0$ allora per il punto **i)** abbiamo che $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $f = 0$, quindi $\ker(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)) = \{0\} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)$ è iniettiva

Claim: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)$ è suriettiva. Questo è vero perché se $A \in M_{n \times m}(K)$ allora basta costruire l'applicazione f_A sugli elementi della base come quell'applicaz. lineare che $f_A(v_j) := \sum_i a_{ij} w_i$ e poi estendere a tutti gli elementi di V per linearità [in sostanza l'applicaz. esiste ed è unica per il **Teorema di struttura per applicazioni lineari**. $\square$

Riassunto:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[rr, bend left, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\bullet)", "\cong"'] & \square & M_{n\times m}(K) \arrow[ll, bend left, "f_{\bullet}", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$

Parafrasi: Esiste un **ISOMORFISMO** tra **1.** lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo, dimensione finita e basi fissate, **e 2.** lo spazio vettoriale delle matrici sullo stesso campo con tante colonne quante dim(W) e tante righe quante dim(V)

Parafrasi (Parafrasi): "Le applicazioni lineari sono matrici, e le matrici sono applicazioni lineari" (ma solo **DOPO** aver **SCELTO** una **BASE** per ciascuno spazio V e W).

Oss.: Se $V = K^m$ con $\mathcal{E}_V := \{e_1, \dots, e_m\}$ canonica
Se $W = K^n$ con $\mathcal{E}_W := \{e'_1, \dots, e'_n\}$ canonica $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ l'inversa della applicazione lineare $M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(\bullet)$ è proprio l'applicazione lineare $\mathcal{L}_\bullet$, ovvero:

$$M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(\mathcal{L}_A) = A, \qquad \mathcal{L}_{M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f)} = f$$

Oss.: Se $V = W$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = I_m$ (matrice identità)
ma se $V = W$ e $\mathcal{B} \neq \mathcal{C} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \neq I_m$ (matrice identità)

Esempio [TIPICO D'ESAME]

I.E. ENTRAMBE BASI CANONICHE

$$f: V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow W = \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{B} := \mathcal{E}_V = \{e_1, e_2\}, \quad \mathcal{C} := \mathcal{E}_W = \{e_1', e_2', e_3'\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x \\ x + y \end{pmatrix}$$

Costruiamo la matrice $A := M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left.\begin{aligned} A^{(1)} &:= f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A^{(2)} &:= f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M^{\mathcal{E}_V}_{\mathcal{E}_W}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 2 \Longrightarrow$ per il teorema della dimensione

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rank}(f) = \text{rank}(A) = 2$

$\Downarrow$

$\dim(\ker(f)) = 0$

$\Downarrow$

$\ker(f) = \{0\}$

$\text{rank}(A) = 2 \Longrightarrow$

$$\text{Im}(f) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

D: E se invece che avere le basi **CANONICHE** avessimo avuto due basi più complicate?

$$\tilde{B} := \Big\{ \underbrace{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}}_{\text{LINEARM. INDIP.}} \Big\} \qquad \tilde{C} := \Big\{ \underbrace{\underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}_{\text{LINEARM. INDIP.}} \Big\}$$

Allora abbiamo **UNO STEP AGGIUNTIVO**: Determinare **$f(v_1)$, $f(v_2)$ COME COMBINAZIONE LINEARE di w_1, w_2, w_3.**

$$A^{(1)}: \quad f(v_1) = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}: \quad f(v_2) = f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Per determinare la prima colonna $A^{(1)}$ dobbiamo determinare i coefficienti della combinazione lineare di w_1, w_2, w_3 che danno $f(v_1)$, cioè vogliamo trovare a_{11}, a_{21}, a_{31}. Come al solito questo significa che dobbiamo risolvere un sistema lineare! Sì, ma quale?

Basta usare la definizione di prodotto riga per colonne e riscrivere il sistema come:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{FORMA MATRICE}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

LA MATRICE COMPLETA
È GIÀ IN FORMA SCALA!
SIAMO FORTUNATI

$\rightsquigarrow$ METODO di SOSTITUZIONE ALL' INDIETRO:

$$\begin{cases} a_{31} = 2 \\ a_{21} + \underset{2}{a_{31}} = 1 \Rightarrow a_{21} = -1 \\ a_{11} + \underset{-1}{a_{21}} + \underset{2}{a_{31}} = -1 \Rightarrow a_{11} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(v_1) = -2w_1 - 1 \cdot w_2 + 2w_3 \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per trovare la seconda colonna $A^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{GIÁ IN FORMA SCALA}} \to \begin{cases} a_{32} = 0 \\ a_{22} + 0 = 1 \Rightarrow a_{22} = 1 \\ a_{12} + 0 + 1 = 5 \Rightarrow a_{12} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(v_2) = 4w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne concludiamo che:

$$A = M^{\tilde{B}}_{\tilde{C}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$$

Oss.: $\text{rank}(f)$, $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$ rimangono invariati perché in effetti f è la stessa di prima, abbiamo solo usato **BASI DIVERSE.**

D: ma quindi però sfruttare questa cosa per calcolarsi cose nelle basi canoniche che sono più facili?!

R: esatto.

Esempio: $f: \overset{V}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}} \to \overset{W}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}}$ con BASI CANONICHE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + \pi z \\ x - y + \sqrt{2} \cdot z \\ y + z \end{pmatrix} \rightsquigarrow M_{\mathcal{E}_W}^{\mathcal{E}_V}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}\left(M_{\mathcal{E}_W}^{\mathcal{E}_V}(f)\right) \overset{\text{Gauß}}{=} 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \ker(f) = \{0\}$$

Esempio: $$f : \underset{V}{\mathbb{R}[x]_3} \longrightarrow \underset{W}{\mathbb{R}[x]_3}$$
$$p(x) \longmapsto p'(x)$$

AD UN POLINOMIO ASSOCIA LA SUA DERIVATA

Scegliamo $\mathcal{B}^V = \mathcal{B}^W = \{1, x, x^2, x^3\}$ perché ogni polinomio di grado al più 3 si può scrivere come:

$$p(x) = 1 \cdot a_0 + x^1 \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + x^3 \cdot a_3$$

STEP I: Calcoliamo le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}^V$ nella base del codominio $\mathcal{B}^W$

$$f(1) = \frac{\partial}{\partial x}(1) = \mathbf{0}$$
$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 = \mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x^3$$
$$f(x^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \mathbf{0} \cdot 1 + \mathbf{2} \cdot x + \mathbf{0} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x^3$$
$$f(x^3) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2 = \mathbf{0} \cdot 1 + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{3} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x^3$$

$$\rightsquigarrow M^{\mathcal{E}^V}_{\mathcal{E}^W}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

chiaramente di rango $= 3 = \dim(\operatorname{Im}(f))$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}[x]_3) - \operatorname{rank}\left(M^{\mathcal{E}^V}_{\mathcal{E}^W}(f)\right)$$

$$= 4 - 3 = 1$$

Quindi $\ker(f) \neq \{0\}$ e quindi la funzione derivata è un'applicazione lineare **NON INIETTIVA**. Ma questo non lo sapevamo già perché per esempio

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{5x^2+3}\right) = 10 \cdot x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{5x^2-1}\right)$$

DUE ELEMENTI DIVERSI CON LA STESSA IMMAGINE

Ma se il nucleo non è banale, dobbiamo preoccuparci di descriverlo come spazio vettoriale con una base

$$\ker(f) = \operatorname{Span}(v)$$

BASTA UN SOLO VETTORE PERCHÉ $\operatorname{DIM}(\operatorname{KER}(f)) = 1$

dove v è soluzione del sistema lineare omogeneo (non la soluzione nulla!)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha chiaramente soluzioni della forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \ker(f) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}(e_1)$$

ma anche questo noi lo sapevamo già! Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x) = 0 \implies p(x) = t \in \mathbb{R} \text{ COSTANTE}$$

e la prima coordinata di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ moltiplica proprio l'elemento della base x^0 che rappresenta i termini costanti.

D'altra parte si ha che: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Span}(e_2, e_3, e_4)$$