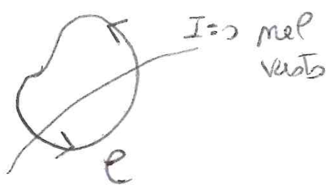
→ Se ∴ che il campo $\vec{E}$ & $\vec{B}$ soddisfano l'eq.ne di ~~Maxwell~~ d'Alembert, allora $\vec{E}$ & $\vec{B}$ mi rappresenteranno un'onda che si propaga

⇝ Partiamo da Eq. Maxwell nel vuoto: (forma integrale)

1) $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ Legge di Gauss per $\vec{E}$

2) $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ → Legge di Gauss per B: sempre zero perché non ci sono monopoli magnetici

3) $\oint_e \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$ Legge Ampere - Maxwell (Φ_e → Flusso elettrico)

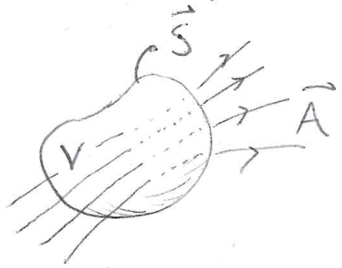


4) $\oint_e \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ Legge Faraday - Lenz (Φ_B → Flusso magnetico)

→ Ricordiamo il Teorema della divergenza (di Gauss)

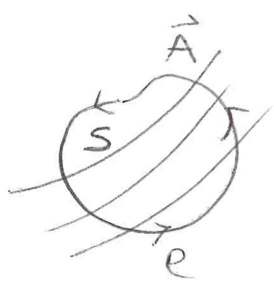
a) $$\underbrace{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}_{\text{flusso } \vec{A} \text{ attraverso } \vec{S}} = \int_V (\overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}^{\text{div } A})\, dV$$

V → Volume racchiuso dalla superficie



→ Ricordiamo il Teorema del Rotore (di Stokes)

b) $$\underbrace{\oint_e \vec{A} \cdot d\vec{e}}_{\text{Circuitazione del campo } \vec{A}} = \underbrace{\int_S (\overbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}^{\text{Rot } A}) \cdot d\vec{S}}_{\text{flusso del rotore sulla superficie racchiusa dal circuito } e}$$



N.B. Qualsiasi superficie che poggi su e applico a) a 1) & 2) e b) a 3) & 4)

$\tilde{1})\ \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dV = 0$

$\tilde{2})\ \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,dV = 0$

Inverto $\int$ e $\frac{d}{dt}$

$$\tilde{3})\ \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\,d\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\int_S d\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)}_{\text{flusso campo elettrico}} = \int_S \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\tilde{4})\ \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\,d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\int_S d\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)}_{\text{flusso campo magnetico}} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

Essendo $\tilde{1}$ & $\tilde{2}$ valide $\forall$ volume, ~~deve valere~~ e $\tilde{3}$ & $\tilde{4}$ $\forall$ superficie:

$$\begin{cases} \dot{1} & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \dot{2} & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \dot{3} & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \\ \dot{4} & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}$$

Eq.ni di Maxwell in forma differenziale

Laplaciano $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ $= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

Regola utile: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \overset{\text{grad}}{\vec{\nabla}}(\overset{\text{div}}{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}) - \nabla^2\vec{A}$

(12 Eq.ne e 6 incognite => Quindi soluzione definita)

partendo da $\dot{4}$:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{0 \text{ per } \dot{1}} - \nabla^2\vec{E} \overset{\text{da } \dot{4}}{=} -\vec{\nabla}\times\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

$$\rightarrow \nabla^2\vec{E} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \overset{\text{per } \dot{3}}{=} \frac{d}{dt}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$ Eq.ne delle onde di d'Alembert

Componendo con l'eq.ne delle onde si ricava che: $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \cdot 10^5 \ km/s$

velocità propagazione

Con gli stessi passaggi, partendo da 3:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \text{Eq.ne di un'onda Magnetica}$$

Introducendo il d'Alembertiano: $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Operatore Differenziale

$$\begin{cases} \Box \vec{E} = 0 \\ \Box \vec{B} = 0 \end{cases}$$

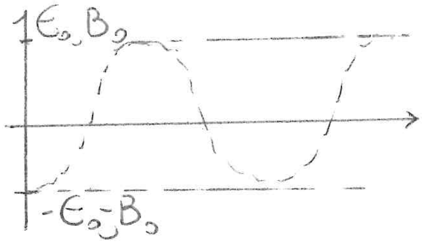
→ Queste l'eq.ne di Maxwell implicano che il campo elettrico e magnetico si propagano come delle onde, che si dimostra viaggiare in modo perpendicolare tra loro alla velocità c.

• funzione d'onda per i campi $\vec{E}$ & $\vec{B}$ (o forma) — Onda piana Trasversale

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \, sen(kx - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \, sen(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{quantità adimensionale}}) \end{cases}$$

questo è 1 forma d'onda, ma ne esistono ∞

$\vec{E}_0, \vec{B}_0$ ampiezza dell'onda



con $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi n$

periodicità del seno

Sarebbe una "pulsazione" spaziale

lunghezza d'onda (periodicità spaziale)

pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

frequenza $[s^{-1}]$ = Hz

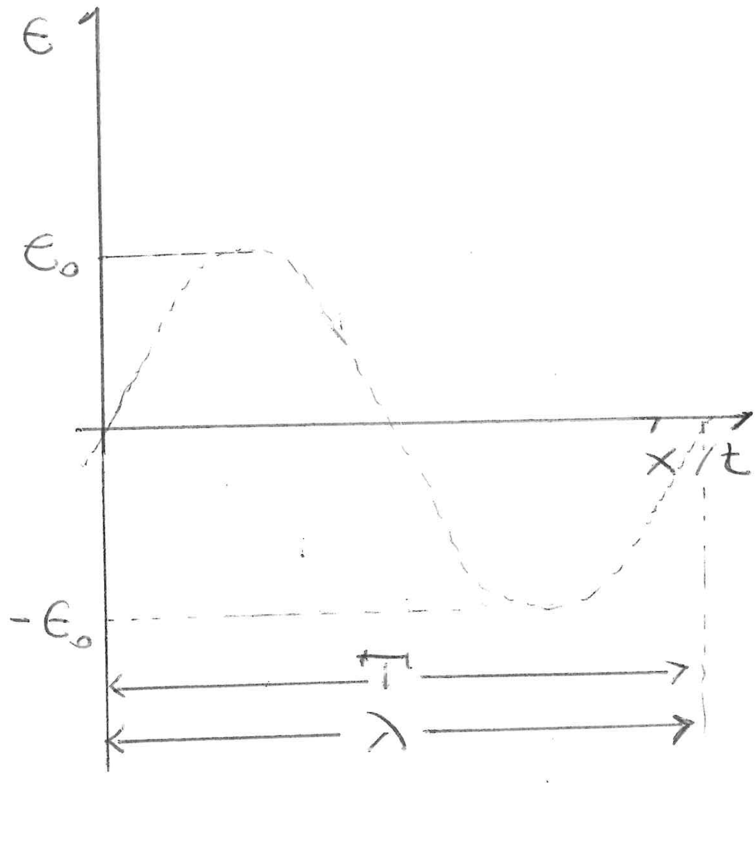
periodo (periodicità temporale)

• Numero d'onde $n = \frac{1}{\lambda}$ $[m^{-1}]$

\# di onde in 1 metro

• Frequenza: $\nu = \frac{1}{T}$ $[s^{-1}]$

\# di battiti in un secondo



• Onda piana la posso descrivere come un'onda che si propaga in una dimensione (e.g. asse x) ed è uniforme nel piano ortogonale (e.g. piano yz). In genere, onde ~~emesse~~ a grandi distanze dalla sorgente possono essere approssimate con un onda piana (e.g. luce proveniente dal sole)

Un'onda piana è Trasversale, ovvero oscilla lungo il piano $\perp$ all'asse di propagazione.

→ In generale le onde possono essere Trasversali e Longitudinali

(e.g. in generale le onde acustiche)

Questo può essere ∴ con le eq. ni di Maxwell:

che in linea di principio può essere trasversale o longitudinale

Consideriamo onda piana che propaga lungo x:

$$\overbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}}}^{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} = 0 \Rightarrow E_x \text{ costante in } x \Rightarrow \text{ovvero } E_x = 0$$

0 poiché componenti E_y & E_z sono costanti lungo y e z ovvero variano solo lungo x

ovvero $E_y(x, c)$ $E_z(x, c)$

a meno di campi elettrostatici

(che visto che parliamo di onde non ci interessa)

Abbiamo quindi dimostrato che l'onda e.m. è nulla lungo la direzione di propagazione, ovvero non oscilla lungo la direzione di propagazione,

* e quindi dovrà oscillare lungo il piano Trasversale

(stessa cosa per B)

osservando che $B_x = 0$ dato che nel vuoto NON ci sono correnti stazionarie

→ Dall'equazioni di Maxwell che coinvolgono il rotore si ricava che $\vec{E} \perp \vec{B}$ e che $E = cB$.

moduli dei campi

Il prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione

↓ ∴

Consideriamo un'onda em che si propaga lungo x; le soluzioni ($\neq 0$) dell'eq.ne d'onda sono:

$$\vec{E} = E_y(x-vt)\hat{u}_y + E_z(x-vt)\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y(x-vt)\hat{u}_y + B_z(x-vt)\hat{u}_z$$

(Componente lungo x abbiamo visto essere nulla)

Dalla legge locale di Faraday-Lenz, per la componente y del rotore abbiamo: $\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial B/\partial t$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \partial_x E_z \overset{(*)}{=} \partial_t B_y$$

$\emptyset$ in qto onda trasversale componente $E_x = \emptyset$

detta $u = x - vt$ $\quad \partial_x u = 1$ & $\partial_t u = -v$

$$\partial_x E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \overset{(*)}{=} \partial_t B_y \quad \& \quad \partial_t E_z = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial u}(-v) \Rightarrow \partial_u E_z = \frac{\partial_t E_z}{-v}$$

$$\partial_x E_z = -\frac{1}{v}\partial_t E_z$$

Integrando (*) in dt:

$$B_y = \int \partial_t B_y dt = \int \partial_x E_z dt = -\frac{1}{v}\int \partial_t E_z dt = -\frac{E_z}{v} + \text{costante}$$

Possiamo porla a $\emptyset$ in quanto legata a soluzioni stazionarie

Abbiamo in definitiva:

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt)$$

analogamente partendo da componente z di $(\nabla \times E_z)$:

$$\Downarrow$$

$$\partial_t B_z = -\partial_x E_y$$

$$B_z(x-vt) = +\frac{1}{v} E_y(x-vt)$$

$\Rightarrow$ Ovvero le componenti dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ NoN sono indipendenti:

a) $\vec{E} = E_y(x-vt)\hat{u}_y + E_z(x-vt)\hat{u}_z$

b) $\cancel{v}\vec{B} = -\frac{E_z}{v}(x-vt)\hat{u}_y + \frac{E_y}{v}(x-vt)\hat{u}_z$

$\Rightarrow$ da b) ricaviamo la relazione tra i moduli

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}\left(E_z^2 + E_y^2\right) = \frac{1}{v^2} E^2$$

$$\Downarrow$$

$$E = vB = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare tra i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v}\left(-E_y E_z + E_z E_y\right) = 0$$

I campi E e B sono ortogonali!

N.B. prodotto scalare e' identicamente nullo se i vettori sono $\perp$ tra loro

$\Rightarrow$ il prodotto vettoriale:

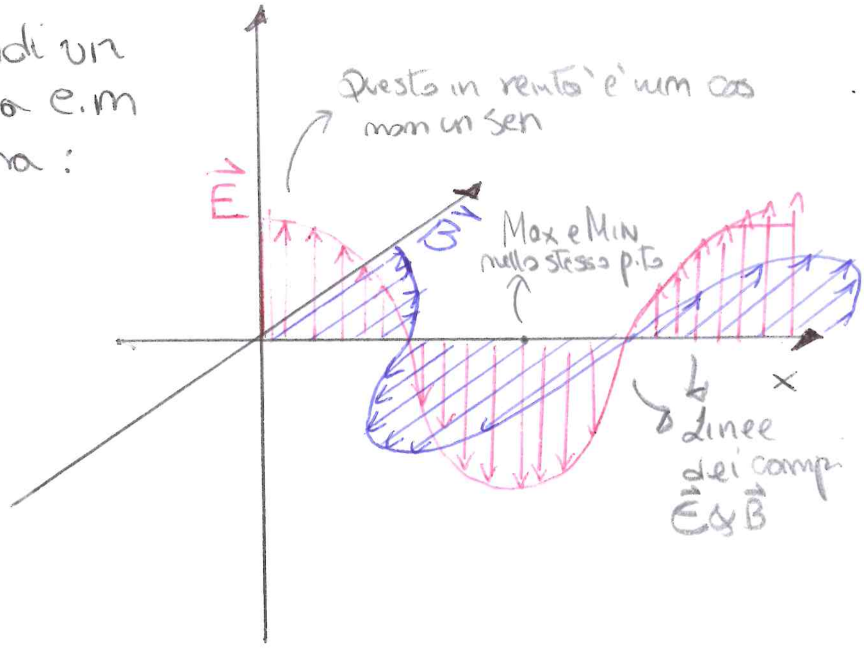
$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v}\left(E_y^2 + E_z^2\right)\hat{u}_x =$$

$$= \frac{E^2}{v}\hat{u}_x = \underset{\substack{\parallel \\ \vec{v}B^2}}{vB^2\hat{u}_x} = EB\hat{u}_x \Rightarrow$$ da la direzione ed il verso di propagazione!

$\hookrightarrow$ in quanto $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{u}_x$

direzione propagazione

Quindi un onda e.m piana :



- E & B si propagano con la stessa velocità c (nel vuoto)
- I moduli dei campi, p.to x p.to, ed istante per istante, sono legati dalla rel.ne: $E = cB$

- $\vec{E}$ & $\vec{B}$ sono ⊥ tra loro e ⊥ alla direzione di propagazione (onde trasversali, x cui è importante concetto di polarizzazione)
- Il verso di propagazione è quello dato dal prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$

→ Alcune relazioni utili: (che derivano dalle relazioni viste prima)

$s = vt$

$\lambda = cT \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow$ La lunghezza d'onda e la frequenza non sono indipendenti!

$\Downarrow$

$\frac{2\pi}{k} = c\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = ck$

- $c = \omega / k$
- $c = \lambda \nu$
- $c = \lambda / T$

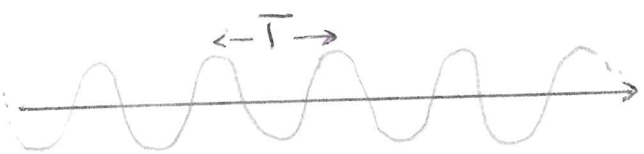
3 modi per esprimere la velocità di propagazione

• Pacchetto d'onde

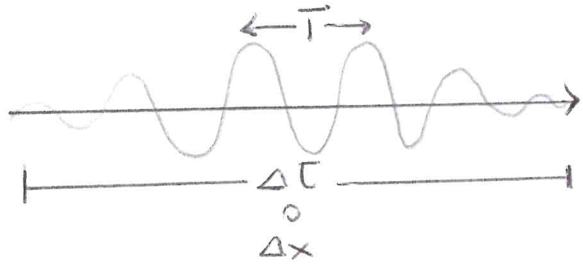
Tutte le sorgenti in genere emettono onde attraverso processi che hanno una durata finita Δt, quindi nella realtà l'onda ha una durata ed un estensione finita.

E.g. la radiazione termica del sole è dovuta ad un numero enorme di atomi che oscillano con frequenze di 10^{14} Hz. L'emissione del singolo atomo avviene in un tempo dell'ordine di 10^{-8} s, durante il quale viene emesso un impulso di luce, ~~il fotone~~, onde detto pacchetto d'onde:

Onda armonica:



Pacchetto d'onde (Fotone)



con $\Delta x = c\Delta t$

Numero di cicli:

* (gira pagina)

$$N = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \text{Non è fissato}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{N}{\Delta x}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{N}{\Delta t}$$

Infatti il pacchetto è composto da una banda di frequenze e numeri d'onda, che diventa tanto più stretto, tanto sono maggiori Δx e Δt (per $\to \infty$ abbiamo onda ARMONICO)

Polarizzazione onde EM:

$\rightarrow \quad \vec{E} = \left(0,\ E_{0y} \operatorname{sen}(kx-\omega t),\ E_{0z} \operatorname{sen}(kx-\omega t+\delta)\right)$

δ → sfasamento

Onda armonica piana (analogo per $\vec{B}$) che si propaga lungo x

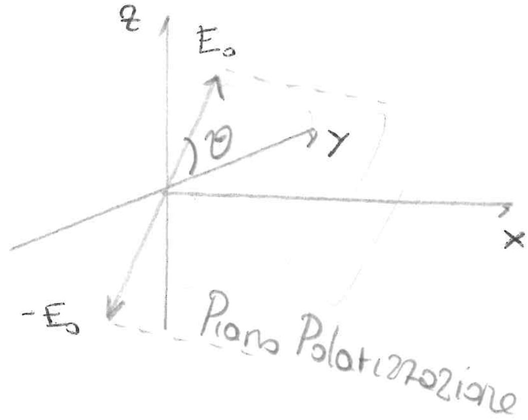
$\Rightarrow$ Polarizzazione Lineare

$\delta = 0, \pi$ (costante)

$$\vec{E} = \left(0,\ E_{0y} \operatorname{sen}(kx-\omega t),\ \pm E_{0z} \operatorname{sen}(kx-\omega t)\right)$$

$+ \rightarrow \delta = 0$; $- \rightarrow \delta = \pi$

$$\tan\theta = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \text{costante}$$



$$E = \pm E_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t)$$

$E_0 = \sqrt{E_{y0}^2 + E_{z0}^2}$

$\Rightarrow$ Polarizzazione Ellittica: $\delta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

$$\vec{E} = \left(0,\ E_{0y} \operatorname{sen}(kx-\omega t),\ \pm E_{0z} \cos(kx-\omega t)\right)$$

$\rightarrow$ direzione di $\vec{E}$ ruota, descrivendo un giro completo dopo λ. Nel piano yz, al passare di t, $\vec{E}$ descrive un ellisse di semiassi E_{0y} & E_{0z}

$\Rightarrow$ Se inoltre $E_{0y} = E_{0z} \Rightarrow E^2 = \sqrt{E_0^2(\operatorname{sen}^2(kx-\omega t) + \cos^2(kx-\omega t))} =$

$= E_0 \Rightarrow$ Modulo costante

$\Downarrow$

Polarizzazione Circolare

$\Rightarrow$ Se la differenza di fase δ varia in maniera CASUALE, non si può stabilire una legge di variazione per la direzione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$: lo stato di polarizzazione, pur essendo definito istante per istante, non lo è più in media nel tempo $\Rightarrow$ Si parla quindi di onda NON polarizzata

$\Downarrow$

Onde EM non pol.te sono ad esempio quelle provenienti dal sole o da un lampadina ad incandescenza