- Energia di un onda e vettore di Poynting:

La presenza di un campo $\vec{E}$ ed $\vec{B}$ in una regione di spazio comporta la presenza di una certa quantità di energia con densità u_{em}.

In un mezzo omogeneo: per i campi E & B abbiamo

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

Quindi la densità di energia em istante per istante

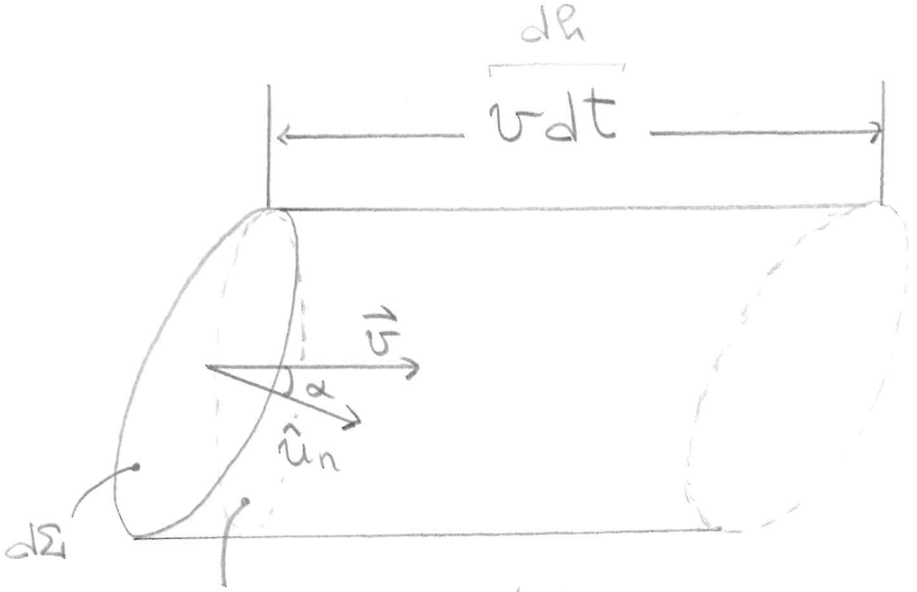
$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = 2u_e = \varepsilon E^2$$

per un'onda em piana $B^2 = E^2/v^2 = \mu\varepsilon E^2$

Ovvero metà dell'energia em è associata ad E, e metà a B

→ Si consideri l'elemento di superficie $d\Sigma$, la cui normale $\hat{u}_n$ forma un angolo α con la direzione di propagazione definita da $\vec{v}$.
Nel tempo dt passa attraverso $d\Sigma$ l'energia:

$$dU = \overbrace{u\,\underbrace{\underbrace{d\Sigma\cos\alpha}_{base}\;\underbrace{v\,dt}_{altezza}}_{d\tau\,=\,Volume\ prisma}}^{=\,u\,d\tau\,=} = \varepsilon E^2 v\cos\alpha\, d\Sigma\, dt$$



$d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\alpha \equiv$ superficie $\perp$ a v

(vettore Poynting)

$$d\tau = d\Sigma_0 \cdot dh =$$
$$= d\Sigma \cos\alpha \cdot v\,dt$$

La potenza che attraversa $d\Sigma_i$ in dt è quindi:

$$dP = \frac{dU}{dt} = \varepsilon E^2 v \cos\alpha \, d\Sigma_i = \varepsilon E^2 \vec{v} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_i$$

Conviene dunque definire il vettore $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} B^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu} \frac{E^2}{\underset{\hookrightarrow \frac{1}{\mu\varepsilon}}{v^2}} \vec{v} = \underbrace{\varepsilon E^2}_{u_{em}} \vec{v}$$

Vettore di Poynting

Verso e direzione coincidenti con $\vec{v}$ di propagazione

Così da riscrivere la potenza istantanea che attraversa $d\Sigma_i$ come il flusso di $\vec{S}$ attraverso $d\Sigma_i$:

$$dP = \underbrace{\vec{S} \cdot \hat{u}_n d\Sigma_i}_{\text{def. flusso}} = S \, d\Sigma_{i0}$$

↳ Sup. ortogonale a v: $d\Sigma_i \cos\alpha$

$$|\vec{S}| = S = \frac{dP}{d\Sigma_{i0}} = v \, u_{em} \quad \left[\frac{J}{s\,m^2} = \frac{W}{m^2} \right] \Rightarrow$$

Il modulo di $\vec{S}$ rappresenta l'energia em che attraversa l'unità di sup. $\perp$ alla propagazione nell'unità di tempo

In genere, dato il grande valore di ω nelle onde em, è rilevante calcolare il flusso medio di energia, a cui si dà il nome di INTENSITÀ dell'onda

$$I = \left(\overline{\frac{dU}{dt}} \right) \frac{1}{d\Sigma_i} = \langle S \rangle \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

→ Per un'onda piana polarizzata linearmente

$$\bar{E} = E_0 \operatorname{sen}(kn - \omega t)$$

$\downarrow$

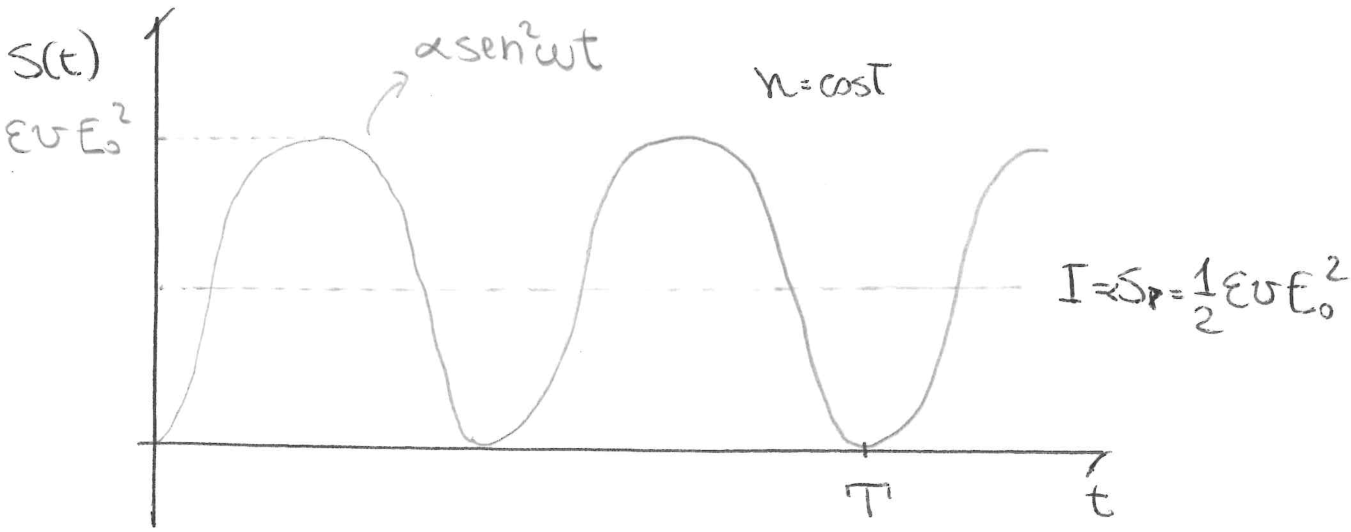
$$S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v E_0^2 \operatorname{sen}^2(kn - \omega t)$$

Il valor medio di S su un intervallo di Tempo t vale:

$$\rightarrow = \frac{1}{2} E_0 t$$

$$I = \langle S \rangle = \varepsilon v \langle E^2 \rangle = \varepsilon v \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \operatorname{sen}^2(kn - \omega t)\, dt =$$

$$^{*} = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 \Leftarrow \text{Intensità onda piana}$$



$$^{*} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{sen}^2(\omega t')\, dt' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega t} \operatorname{sen}(2\omega t) \simeq \frac{1}{2} \text{ per } t \gg T$$

$\downarrow$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Onde elettromagnetiche sferiche

→ In genere una sorgente di onde EM emette onde che si propagano in tutte le direzioni

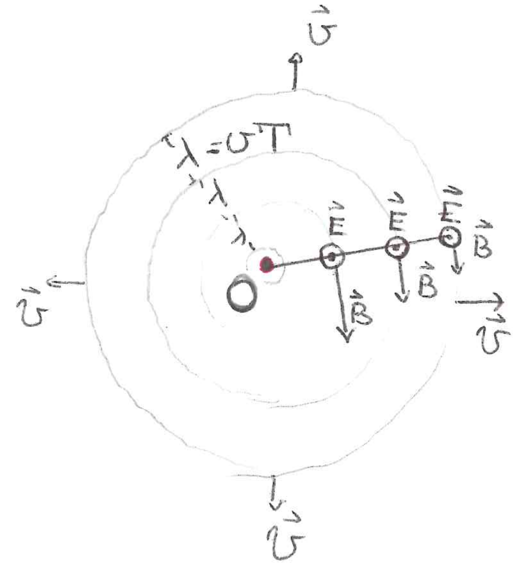
Consideriamo una sorgente puntiforme che emette onde em armoniche in modo ISOTROPICO:

$$E(r,t) = E_0(r)\,\sin(kr-\omega t)$$ → Analogo per $\vec{B}$

DATO CHE ISOTROPICA:

→ la v di propagazione è la stessa in tutte le direzioni

→ L'ampiezza $E_0(r)$ può dipendere solo dalla distanza dalla sorgente, r



→ I fronti d'onda sono sfere sulle quali la fase $kr-\omega t = cost$, e che compiono in un periodo $T = 2\pi/\omega$ la distanza λ

La potenza media che attraversa una superficie sferica di raggio r concentrica ad O risulta:

$$\langle P\rangle = I\,\Sigma = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2(r)\,4\pi r^2 = cost$$ ⇒ In quanto corrisponde alla ⟨potenza⟩ emessa dalla sorgente

I: intensità onda

$$\Downarrow$$

$$E_0(r) \propto \frac{1}{r}$$

Avremo quindi:

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r} \operatorname{sen}(Kr - \omega t)$$

$$B(r,t) = \frac{E_0}{vr} \operatorname{sen}(Kr - \omega t)$$

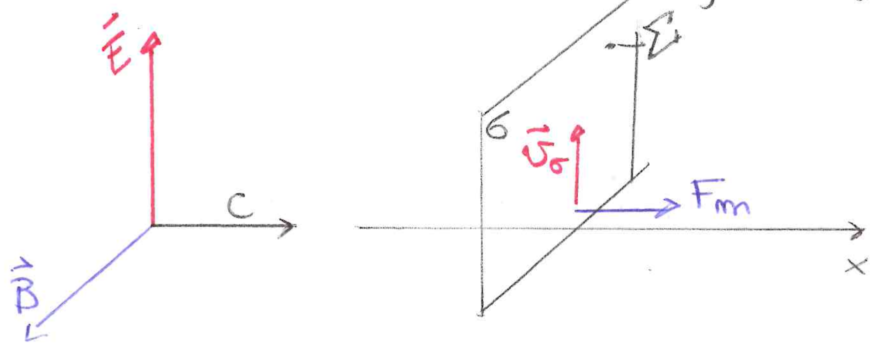
e l'intensità: $I = \frac{1}{2} v \varepsilon \frac{E_0^2}{r^2}$ $\Rightarrow$ diminuisce con il quadrato della distanza dalla sorgente

Pressione di Radiazione

Le onde em, oltre che energia trasportano quantità di moto. Per metterlo in evidenza consideriamo una superficie $\Sigma_i \perp$ alla direzione di propagazione su cui e' distribuita la carica $\sigma = q/\Sigma_i$. La forza per unità di superficie esercitata dai campi è:

$$\frac{\vec{F}}{\Sigma_i} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v}_\sigma \times \vec{B}\right)$$

$\hookrightarrow$ Velocità comunicata alle cariche dalla forza elettrica



L'unità di superficie assorbe quindi la potenza media (ovvero I)

$$\frac{\langle P \rangle}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma_i}\langle \vec{F} \cdot \vec{v}_\sigma \rangle = \sigma \vec{E} \cdot \vec{v}_\sigma + \sigma\left(\vec{v}_\sigma \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}_\sigma = \sigma v_\sigma \langle E \rangle = I$$

sono //

0 prodotto misto con 2 vettori uguali

Solo il campo elettrico trasferisce potenza

A questo assorbimento non corrisponde un effetto meccanico globale sulla Σ_i poiché $\vec{E} \parallel \Sigma_i$, e quindi la forza elettrica $\parallel \Sigma_i$

Corrisponde all'intensità di energia trasportata dall'onda $I = \frac{dU}{dt \, d\Sigma}$

→ Invece la forza magnetica da origine ad un effetto meccanico, pur non assorbendo energia, in quanto ⊥ a $\vec{v}_\sigma$. Avremo:

$$\frac{\langle F_m \rangle}{\Sigma_1} = \langle \sigma (\vec{v}_\sigma \times \vec{B}) \rangle = \sigma (\langle v_\sigma B \rangle) \hat{u}_x = \frac{\sigma}{c} \langle v_\sigma E \rangle \hat{u}_x = \frac{I}{c} \hat{u}_x$$

Concorde all'asse di propagazione

Corrisponde ad una pressione:

$$^{*} P_{rad} = \frac{I}{c}$$

Pressione di Radiazione

Assumendo Σ_1 completamente Assorbente

→ D'altra parte nel tempo Δt, l'onda fornisce alla superficie l'impulso $\langle F_m \rangle \Delta t$ *, quindi nell'unità di tempo, per unità di superficie, l'onda cede la quantità di moto I/c.

corrisponde alla q.d.m che l'onda cede per u.d.T e Σ_1

→ In genere le superfici non sono completamente assorbenti, ma parte dell'energia viene assorbita e parte riflessa. L'altro caso limite si ha per una superficie completamente riflettente; l'onda incidente ⊥ su Σ_1, dopo la riflessione si propaga lungo $-\hat{u}_x$, la q.d.m cambia verso ($\Delta q = q_f - q_i = 2q_i$) e l'impulso raddoppia rispetto al caso precedente: $P_{rad}^{Rifl} = 2\frac{I}{c}$

considerando una sup.ce ⊥ alla direzione di prop.ne, mediata in un anno

Potenza solare

Il sole è una sorgente molto intensa di onde elettromagnetiche non polarizzate. Sulla superficie terrestre l'intensità della radiazione solare vale circa $I = 1.4 \cdot 10^3$ W/m^2. Dato il grande valore della distanza sole-terra ($r \simeq 1.5 \cdot 10^{11}$ m) possiamo considerare paralleli i fasci luminosi e quindi localmente piane le onde incidenti. Le ampiezze dei campi elettrico e magnetico E e B sulla superficie terrestre risultano:

$$* \quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 1.03 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.43 \cdot 10^{-6} \text{ T.} \qquad * \; I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

La pressione della radiazione solare su un oggetto, ~~in base a (10.34) e (10.35)~~, vale

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \quad , \quad P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = 9.34 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \; ,$$

rispettivamente per un corpo assorbente e per un corpo riflettente. Si tratta di valori inferiori di circa 11 ordini di grandezza rispetto alla pressione atmosferica, patm $\simeq 10^5$ Pa.

Se immaginiamo che l'intensità misurata sulla superficie terrestre sia distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio $r = 1.5 \cdot 10^{11}$ m, abbiamo una stima della potenza della sorgente solare, detta anche luminosità del sole:

$$\mathscr{P}_{\text{sole}} = I 4\pi r^2 = 3.96 \cdot 10^{26} \text{ W} \; .$$

Sorgente dell'energia solare sono i processi di fusione nucleare che avvengono all'interno del sole. Si ritiene che il processo principale sia la fusione di quattro nuclei di idrogeno in un nucleo di elio attraverso una catena di reazioni successive. La differenza di massa tra stato iniziale e stato finale è

$$\Delta m = 4 \, m_{\text{H}} - m_{\text{He}} = 4 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} - 6.6420 \cdot 10^{-27} = 0.0484 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

e a questa corrisponde l'energia liberata

$$\Delta U = \Delta m \, c^2 = 4.356 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV} \; . \qquad 1 \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La temperatura all'interno del sole, costituito principalmente da idrogeno, è di circa $1.5 \cdot 10^7$ K; l'energia del moto di agitazione termica dei nuclei di idrogeno è tale da permettere a questi di superare la repulsione elettrica e di avvicinarsi talmente tra loro da risentire della forza nucleare attrattiva, causa della fusione nucleare.

L'energia liberata dalla fusione compare sotto forma di energia cinetica delle particelle che vengono emesse durante le reazioni (tra cui neutrini) e di energia elettromagnetica; essa è in massima parte riassorbita dal mezzo circostante. L'insieme di tutti i processi consente una situazione di equilibrio dinamico, con un flusso di energia dall'interno verso la superficie del sole, che si trova a circa $6 \cdot 10^3$ K, temperatura troppo bassa perché avvengano processi di fusione. La radiazione che noi riceviamo è emessa dagli atomi degli strati superficiali del sole, eccitati tramite urti termici. * → Vedi dopo rad. corpo Nero

Una stima del numero di fusioni al secondo necessarie per generare la potenza emessa è

$$n_f = \frac{\mathscr{P}_{\text{sole}}}{\Delta U} = \frac{3.96 \cdot 10^{26}}{4.36 \cdot 10^{-12}} = 9.1 \cdot 10^{37} \text{ fusioni/s}$$

e in un secondo viene consumata una massa di idrogeno pari a

$$M_{\text{H}} = 4 \, m_{\text{H}} \, n_f = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ kg/s} \; ,$$

ovvero in un anno $1.9 \cdot 10^{19}$ kg (~1/10 di Plutone). La massa del sole è $2 \cdot 10^{30}$ kg; per consumarne metà, cioè per consumarne $1 \cdot 10^{30}$ kg, occorrono $\simeq 5 \cdot 10^{10}$ anni

↳ Età Universo ~ 13 byr

In verità, l'evoluzione di una stella come il sole, segue un'altra traiettoria dopo ~ 10^{10} yr