

12 Novembre

Notazione (Prodotto) Date n numeri

$a_1, \dots, a_n$ scriviamo

$$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Esempio $\prod_{j=1}^4 a_j = a_1$

Lemma Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo $x^a; \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

Allora $(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \quad (P_n)$

Osservazione 1) Per $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($x^0 \equiv 1$)
 (P_n) vale $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Se ad esempio $a = \frac{1}{3}$ (P_n) vale $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Per $a = 0$, siccome $x^0 \equiv 1 \Rightarrow (x^0)^{(n)} \equiv 0 \quad \forall n \geq 1$.

Per $n \geq 1$

$$\prod_{j=1}^n (0-j+1) x^{0-n} = (\overbrace{0-1+1}^0) (0-2+1) \dots (0-n+1) x^{0-n}$$

$$= 0 \quad (-1)(-2) \dots (-(n-1)) x^{-n} = 0$$

↑

Dim Vogliamo $\forall n \geq 1$

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \quad (P_n)$$

si procede per induzione

$$1) n=1 \quad (x^a)' = (x^a)^{(1)} = a x^{a-1}$$

$$\prod_{j=1}^1 (a-j+1) x^{a-1} = a x^{a-1}$$

$\Rightarrow P_1$ è vera

2) P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ vera

$$P_n \text{ vera} \Rightarrow (x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \quad P_n$$

e vogliamo dimostrare che ciò implica

$$(x^a)^{(n+1)} = \prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1) x^{a-n-1} \quad P_{n+1}$$

$$(x^a)^{(n+1)} = \left((x^a)^{(n)} \right)' = \left(\prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \right)' =$$

$$= \prod_{j=1}^n (a-j+1) (x^{a-n})' = \prod_{j=1}^n (a-j+1) (a-n) x^{a-n-1}$$

Risultato che

$$\prod_{j=1}^n (a-j+1) (a-n) \equiv \prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1)$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1) \equiv \prod_{j=1}^n (a-j+1) \cdot \overbrace{(a-n)}^{(a-(n+1)+1)}$$

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n}$$

Esempio

$$1) (x^n)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (n-j+1) x^{\overbrace{n-n}^0} = x^0 \equiv 1$$

$$= \prod_{j=1}^n (n-j+1) = n (n-1) \dots 1 = n!$$

2) Se $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$

$$(x^m)^{(n)} = 0$$

$$(x^7)^{(10)} = 0$$

$$(x^7)^{(10)} = \left((x^7)^{(7)} \right)^{(3)} = \left(\frac{d}{dx} \right)^{10} x^7 = \left(\frac{d}{dx} \right)^3 \left(\frac{d}{dx} \right)^7 x^7$$

$$= \left(\frac{d}{dx} \right)^3 7! = 0$$

$$(x^7)^{(10)} = \prod_{j=1}^{10} (7-j+1) x^{7-10}$$

$$= \underbrace{7 \dots (-2)}_{\text{il prodotto di tutti gli interi da } -2 \text{ a } 7} x^{-3} = 0$$

è il prodotto di tutti gli interi da -2 a 7

In particolare tra loro c'è lo 0

Lemma $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ finto, $(x-x_0)^a : (x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\forall a \in \mathbb{R}$

si ha

$$\left((x-x_0)^a \right)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) (x-x_0)^{a-n} \quad (P_n)$$

Osservazione 1) $a \in \mathbb{N}$ P_n vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$2) \left((x-x_0)^n \right)^{(n)} = n!$$

$$3) \text{ se } m \in \mathbb{N} \quad m < n$$

$$\left((x-x_0)^m \right)^{(n)} = 0$$

Esercizio 1 Dimostrate che se $f(x)$ definito in $\mathbb{R}$ ammette n derivate e se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\left(f(x-x_0) \right)^{(n)} = f^{(n)}(x-x_0)$$

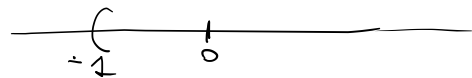
2) Usando la formula Testi' data dimostrate
 l'ultimo Lemma a partire dal precedente (dove $x_0=0$)

Corollario 1 Posto $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ \frac{\prod_{j=1}^n (a-j+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

si ha che il polinomio di McLaurin $P_m(x)$ di ordine n di $(1+x)^a$ è

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^n \binom{a}{j} x^j.$$



Dim Per definizione se $f(x) = (1+x)^a$

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$$f^{(j)}(x) = \left((1+x)^a \right)^{(j)} = \prod_{k=1}^j (a-k+1) (1+x)^{a-j}$$

$$f^{(j)}(0) = \prod_{k=1}^j (a-k+1)$$

$$= \underbrace{f(0)}_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{k=1}^j (a-k+1)}{j!} x^j =$$

$$= \binom{a}{0} + \sum_{j=1}^n \binom{a}{j} x^j = \sum_{j=0}^n \binom{a}{j} x^j$$

$$\binom{a}{n} = \frac{\prod_{k=1}^n (a-k+1)}{n!}$$

$$\binom{a}{j} = \frac{\prod_{k=1}^j (a-k+1)}{j!}$$

cioè

Se $f(x)$ è derivabile n volte in x_0

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j \quad \text{dove } f^{(0)} = f$$

Teorema $P_{n,x_0}(x)$ è l'unico polinomio di

grado $\leq n$ t.c.

$$P_{n,x_0}^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \quad \forall j=0, \dots, n.$$

Questo teorema sarà un corollario del seguente lemma

Lemma Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ~~distinti~~ assegnati. Allora $\exists!$ un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$p^{(j)}(x_0) = a_j \quad \forall j=0, \dots, n.$$

$$\text{Vale } p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} (x-x_0)^j. \quad (1)$$

Osservazione Il teorema si ottiene dal lemma ponendo $a_j = f^{(j)}(x_0)$.

Dim del lemma Prendiamo direttamente il polinomio in (1)

e verifichiamo che il polinomio $p(x)$ definito in (1)

è t.c. $\deg p(x) \leq n$ e che $p^{(j)}(x_0) = a_j$
 $j=0, \dots, n$

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} (x-x_0)^j$$

È immediato che $\deg p(x) \leq n$ poiché è una combinazione lineare dei polinomi $(x-x_0)^j$ dove $\deg(x-x_0)^j = j \leq n$. Calcoliamo le derivate

$$p(x_0) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} (x_0-x_0)^j = \frac{a_0}{0!} \underbrace{(x_0-x_0)^0}_1 = a_0$$

$n \geq 1$

$$\begin{aligned} p^{(l)}(x) &= \left(\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} (x-x_0)^j \right)^{(l)} = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} \left((x-x_0)^j \right)^{(l)} \\ &= \sum_{j=l}^n \frac{a_j}{j!} \prod_{k=1}^l (j-k+1) (x-x_0)^{j-l} \\ &= \sum_{j=l}^n \frac{a_j}{j!} \prod_{k=1}^l (j-k+1) (x-x_0)^{j-l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{(l)}(x) &= \frac{a_l}{l!} \prod_{k=1}^l (l-k+1) \underbrace{(x-x_0)^0}_1 + \\ &+ \sum_{j=l+1}^n \frac{a_j}{j!} \prod_{k=1}^l (j-k+1) (x-x_0)^{j-l} \end{aligned}$$

$$p^{(l)}(x) = \frac{a_l}{l!} \cancel{e^x} + \sum_{j=l+1}^n \frac{a_j}{j!} \prod_{k=1}^l (j-k+1) \underbrace{(x-x_0)^{j-l}}_{\neq 0}$$

$$\begin{aligned} p^{(l)}(x_0) &= a_l + \sum_{j=l+1}^n \frac{a_j}{j!} \prod_{k=1}^l (j-k+1) \underbrace{(x_0-x_0)^{j-l}}_0 \\ &= a_l \quad l=0, \dots, n \end{aligned}$$

Dobbiamo verificare che $p(x)$ in (1) è l'unico polinomio che soddisfa le condizioni del lemma.

Supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio di grado

$$\begin{aligned} \text{t.c.} \quad q(x) &= \sum_{j=0}^n b_j x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n b_j ((x-x_0)+x_0)^j = \sum_{j=0}^n c_j (x-x_0)^j \end{aligned}$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \underbrace{(\binom{j}{j})}_{=1} (x-x_0)^j$$

$$q^{(j)}(x_0) = c_j j! = a_j \quad \forall 0 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{a_j}{j!}$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n c_j (x-x_0)^j = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} (x-x_0)^j = p(x)$$