Tutorato di Analisi 1

Foglio di esercizi 4

1. (a) Dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ non esiste, cioè dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = l$ è falso per ogni $l \in \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$.

   (b) Dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}$ non esiste.

2. Dimostrare che se $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = l \in \mathbf{R}$ e $b \neq 0$, allora $\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x} = b\cdot l$. Cosa succede se $b = 0$?

3. Per ogni n sia A_n un insieme finito di punti di $[0,1]$, tali che $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

   Definiamo f nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in A_n, \\ 0 & \text{se } x \notin A_n \end{cases}$$

   Dimostrare che $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ per ogni $a \in [0,1]$.

4. Mostrare con degli esempi che le seguenti definizioni di $\lim_{x\to a} f(x) = l$ non sono corrette:

   (a) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \delta$

   (b) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta$

5. Dimostrare che

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

6. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6x^4 - x^2}{x - x^3}$

   (b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2 + x^3} - \sqrt[3]{1 + 2x^2 + x^3}$

   (c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \cos x}{4x - \sin x}$

   (d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1}$

   (e) $\lim_{x \to -\infty} x \cdot (\sqrt{1 + x^4} - x^2)$

   (f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{2x + x^2 + 3}$