Speranza Matematica

Speranza Matematica

- X va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$; vogliamo definire

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}P(\omega)$$

  - valor medio/atteso di X
  - speranza matematica di X
  - baricentro di X $\rightsquigarrow$ misura di locazione di X
  - integrale astratto di X rispetto a P su Ω

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va semplice,

$$X = \sum_{i=1}^{m} c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, m$; si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{m} c_i P(A_i) \in \mathbb{R}$$

  - non dipende dalla rappresentazione di X

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va semplice,
- Esempio.
  - $X = c$ q.c. (degenere), $E[X] = c$
  - $X \sim$ Bernoulli(p),
$$E[X] = p = P(A)$$
  - X con valori $x_1, \ldots, x_n$ e masse $p_1, \ldots, p_n$
$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$
  - $X \sim$ Binomiale(n, p)
$$X = 1_{E_1} + \ldots + 1_{E_n}$$
con (E_i) indipendenti e $P(E_i) = p$
$$E[X] = np$$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va nonnegativa, $X \geq 0$; si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P$$
$$= \sup\{E[Y] \mid Y \text{ va semplice, } 0 \leq Y \leq X\} \in [0, +\infty]$$

$E[X] = +\infty$ è possibile!

- $X_1, X_2 \geq 0$ va; si può provare che
  - se $X_1 \leq X_2$ allora $0 \leq E[X_1] \leq E[X_2]$
  - $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$
  - se $X_1 \leq K$ con $K > 0$, allora $E[X] < +\infty$

Speranza Matematica

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si pone

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \qquad \text{parte positiva di } x$$
$$x^- = \max\{-x, 0\}, \qquad \text{parte negativa di } x$$

  e riesce

  - $x^+, x^- \geq 0$
  - $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$
  - $x^+ \leq |x|$, $x^- \leq |x|$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X va (qualunque); X è integrabile se

$$E[|X|] < +\infty \Leftrightarrow E[X^+] < +\infty,\ E[X^-] < +\infty$$

in questo caso si definisce

$$E[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}P = E[X^+] - E[X^-] \in \mathbb{R}$$

- Per ogni $p \geq 1$

$$L^p = L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) = \{X \text{ va su } (\Omega, \mathscr{F}, P) \text{ con } E[|X|^p] < +\infty\}$$

L^p: va p-integrabili

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Linearità]: L^p è uno spazio vettoriale;
    per ogni $X, Y \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$
    $$E[X+Y] = E[X] + E[Y], \qquad E[\alpha X] = \alpha E[X]$$
  - [Monotonia], $X, Y \in L^1$, $X \leq Y$ q.c.,
    $$E[X] \leq E[Y]$$
  - se X è dominata, $|X| \leq Y$ q.c. con $Y \in L^1$ allora $X \in L^1$
  - se $1 \leq p < q$ allora $L^q \subset L^p$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - se $X = 0$ q.c., allora $X \in L^1$ e $E[X] = 0$
  - se $A \in \mathscr{F}$, $P(A) = 0$, allora $X1_A \in L^1$ e $E[X1_A] = 0$
  - se $X \geq 0$ q.c. allora $E[X] \geq 0$
    inoltre,
    $$E[X] = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ q.c.}$$
    oppure
    $$E[X] > 0 \Leftrightarrow P(X > 0) > 0$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine (I)]:

    $$X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P) \Leftrightarrow f(x) = x \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, P_X)$$

    e in questo caso

    $$E[X] = \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}P(\omega) = \int_\mathbb{R} x \mathrm{d}P_X(x)$$

    notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

    $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_X(x)$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine (II)]: X va, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile

$$g(X) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P) \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, P_X)$$

    e in questo caso

$$E[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\mathrm{d}P(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)\mathrm{d}P_X(x)$$

    notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F_X(x)$$

- Basta usare la legge di X, non serve quella di $g(X)$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso discreto] X va discreta con valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e masse $p_1, \ldots, p_n, \ldots$

    $$X \in L^1 \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} |x_i| p_i < +\infty$$

    e in questo caso

    $$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

    se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

    $$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso continuo] X va continua con pdf f_X

    $$X \in L^1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) \mathrm{d}x < +\infty$$

    e in questo caso

    $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$$

    se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

    $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica
  - [Caso misto (I)] Se Y è mistura di $X_1, X_2 \in L^1$,
  $$F_Y = \lambda F_{X_1} + (1-\lambda) F_{X_2}$$
  allora $Y \in L^1$ e
  $$E[Y] = \lambda E[X_1] + (1-\lambda) E[X_2]$$
  - [Caso misto (II)] se X ha parte discreta con valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ e masse $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ e parte continua con "densità" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora
  $$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i + \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

Speranza Matematica

- Possibili estensioni
  - tutte le proprietà viste continuano a valere per va nonnegative (anche se non integrabili), con ovvi aggiustamenti
  - si puó definire la speranza matematica di X in generale anche se non integrabile, se una delle due speranza

    $$E[X^+], \qquad E[X^-]$$

    è finita; le proprietà viste continuano a valere, con ovvi aggiustamenti
  - anche se $X \in \overline{\mathbb{R}}$ ha senso definire $E[X] \in \overline{\mathbb{R}}$, a meno che non sia $P(X = +\infty) > 0$, $P(X = -\infty) > 0$; se $E[|X|] < +\infty$ allora X è finita q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.
  - $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  $$E[X] = \lambda$$
  - $X \sim U(a, b)$
  $$E[X] = \frac{a+b}{2}$$
  - $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$
  $$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  $$E[X] = \mu$$
  - X ha distribuzione di Cauchy se la pdf è
  $$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
  speranza matematica non definita

Speranza Matematica

- Alcune trasformate di una va X
  - $E[X^p]$, $E[|X|^p]$ momenti e momenti assoluti di ordine $p > 0$ $(X \in L^p)$
  - $E[(X - E[X])^p]$ momenti centrali di ordine $p > 0$ $(X \in L^p)$
- La distribuzione determina i momenti, ma non viceversa (problema dei momenti); esempio: distribuzione lognormale

Alcune trasformate di una va X

- Funzione generatrice dei momenti

$$M_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}]$$

  - $M_X : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo contenente 0
  - se $M_X(t) = M_Y(t)$ per ogni t in un intorno (non degenere) di 0, allora $X \sim Y$
  - se $X \in L^n$ allora $M_x^{(n)}(0) = E[X^n]$
- Esercizio. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di una Poisson
- Esercizio. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di una normale

Alcune trasformate di una va X

- Funzione caratteristica

$$\varphi_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]$$

  - $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
  - se $\varphi_X = \varphi_Y$ allora $X \sim Y$
  - se $X \in L^n$ allora $\varphi_X^{(n)}(0) = \mathrm{i}^n E[X^n]$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze
  - [Disuguaglianza di Jensen]
    I intervallo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, misurabile
    X va, con $f(X) \in L^1$
    allora $X \in L^1$ e riesce

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

- Esempio.
  - $|E[X]| \leq E[|X|]$ se $X \in L^1$
  - $E[X]^2 \leq E[X^2]$ se $X \in L^2$

Speranza Matematica

- Varianza: se $X \in L^2$ si definisce

$$\sigma_X^2 = \mathrm{VAR}[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{VAR}[X]}$ = deviazione standard di X

- Proprietà: se $X \in L^2$
  - $\mathrm{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2$
  - $\mathrm{VAR}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathrm{VAR}[X]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - $\mathrm{VAR}[X] = 0$ se e solo se $X = E[X]$ q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio.
  - se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $\text{VAR}[X] = p(1-p)$
  - se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, calcolare

$$E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$$

    e ricavare $\text{VAR}[X]$
  - $X \sim U(a,b)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

  - $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{VAR}[X] = \sigma^2$$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze
  - [Disuguaglianza di Markov] $X \geq 0$ q.c., per ogni $\alpha > 0$

$$P(X > \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

  - [Disuguaglianza di Bienaymé-Chebyshev] $X \in L^2$, per ogni $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

quindi per ogni $k \geq 1$ ("evento k-sigma")

$$P(|X - E[X]| > k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

$\rightsquigarrow$ varianza: misura di dispersione di X

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica
  - se $X_n \to X$ q.c. (convergenza quasi certa), cioè per ogni $\omega \in A$ con $P(A) = 1$,
    $$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \to X(\omega),$$
    quando succede che
    $$\lim_{n\to+\infty} E[X_n] = E[X] \qquad ?$$
  - [Teorema di convergenza monotona]
    $(X_n)_{n\geq 1}$ va con $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, q.c.
    allora posto
    $$X = \lim_{n\to+\infty} X_n \equiv \sup_n X_n \text{ q.c.}$$
    riesce
    $$\lim_{n\to+\infty} E[X_n] = E[X] \in [0, +\infty]$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica
  - [Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)]
    $(X_n)_{n\geq 1}$ e X va tali che
    $$\lim_{n\to+\infty} X_n = X \text{ q.c.}$$
    ed esiste $Y \in L^1$ tale che
    $$|X_n| \leq Y \text{ per ogni } n \geq 1, \text{ q.c.}$$
    allora $X_n, X \in L^1$ per ogni $n \geq 1$ e
    $$\lim_{n\to+\infty} E[X_n] = E[X]$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche

  - [Serie a termini positivi]
    $(X_n)_{n\geq 1}$ va con $X_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ q.c., allora

$$E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche
  - [Serie convergente assolutamente] $(X_n)_{n\geq 1}$ va con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n| \in L^1$ e

$$E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

- Quindi, se $\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge assolutamente, q.c.

Speranza Matematica

- Esercizio. Nei seguenti due casi dire se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$$

converge q.c. e calcolare il suo valore atteso

  - $X_n \sim \text{Gamma}(1, 2^{n-1})$, $n \geq 1$
  - per $n \geq 1$

$$X_n \sim \begin{cases} -\frac{1}{n!} & \text{con prob. } 1-p \\ +\frac{1}{n!} & \text{con prob. } p \end{cases}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $\boldsymbol{X}$ va con legge $P_{\boldsymbol{X}}$
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine] se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile e tale che $g(\boldsymbol{X}) \in L^1$ o $g \geq 0$

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

  - [Caso discreto]

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \sum_{j_1,\ldots,j_n} g(x^{(1)}_{j_1}, \ldots, x^{(n)}_{j_n}) p_{j_1,\ldots,j_n}$$

  - [Caso continuo con densità]

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\mathsf{T}$ vettore di va; le seguenti proprietà sono equivalenti
    1. $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti
    2. per ogni $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabili tali che tutte le variabili sono integrabili,
    $$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$$
    3. [Funzione caratteristica] per ogni $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$
    $$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}}] = \varphi_{X_1}(t_1) \cdots \varphi_{X_n}(t_n)$$
    4. [Funzione generatrice dei momenti] per ogni $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che le speranze esistono
    $$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = E[\mathrm{e}^{\boldsymbol{t}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}}] = M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esercizio. $X_1, \ldots, X_n$ va indipendenti, $X = X_1 + \ldots + X_n$
  - se $X_i \sim$ Binomiale(n_i, p) allora $X \sim$ Binomiale$(\sum_i n_i, p)$
  - se $X_i \sim$ Poisson(λ_i) allora $X \sim$ Poisson$(\sum_i \lambda_i)$
    X_i n. di sinistri nel i-esimo portafoglio, X n. totale di sinistri

Variabili Aleatorie Multivariate

- Calcolo di speranze iterate - Teorema di Fubini

  - $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ va in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, indipendenti,
    $g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ misurabile con $g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in L^1$ oppure $g \geq 0$
    allora
    $$E[g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})] = E[E[g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})]|_{x=X}]$$
    in particolare, per ogni $B \in \mathscr{B}^2$
    $$P(g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in B) = E[P(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) \in B)|_{x=X}]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esercizio. Calcolare la legge di $X+Y$ se X, Y sono indipendenti e X, $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$

- Esercizio. Calcolare la legge di U/V se U, V sono indipendenti e U, $V \sim U(0,1)$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Covarianza: se X, $Y \in L^2$, si definisce

$$\mathrm{COV}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$\rightsquigarrow$ misura di dipendenza di X e Y

- Proprietà: se X, Y, $Z \in L^2$
  - $\mathrm{COV}[X,X] = \mathrm{VAR}[X]$; $\mathrm{COV}[X,Y] = 0$ se Y degenere
  - $\mathrm{COV}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
  - [Simmetria] $\mathrm{COV}[X,Y] = \mathrm{COV}[Y,X]$
  - [Bilinearità] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{COV}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha \mathrm{COV}[X,Z] + \beta \mathrm{COV}[Y,Z]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$
  - [Indipendenza] $\mathrm{COV}[X, Y] = 0$ se X, Y indipendenti (non viceversa!)
  - [Varianza della somma]

$$\mathrm{VAR}[X + Y] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y] + 2\mathrm{COV}[X, Y]$$

    e quindi

$$\mathrm{VAR}[X + Y] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y]$$

    se X, Y indipendenti
  - [Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz]

$$|\mathrm{COV}[X, Y]| \leq \sqrt{\mathrm{VAR}[X]\mathrm{VAR}[Y]}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Coefficiente di correlazione (di Pearson): se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$, si definisce

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{CORR}[X,Y] = \frac{\mathrm{COV}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{VAR}[X]\mathrm{VAR}[Y]}}$$

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
  - [Simmetria] $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$
  - [Invarianza di scala e locazione] per ogni $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\rho_{\alpha X + \beta, Y} = \rho_{X,Y}$
  - [Normalizzazione] $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ e $|\rho_{X,Y}| = 1 \Longleftrightarrow Y = \alpha X + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{sgn}(\alpha) = \mathrm{sgn}(\rho_{X,Y}))$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se X, $Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
  - [Indipendenza] $\rho_{X,Y} = 0$ se X, Y indipendenti
  - [Regressione lineare di Y su X] il problema

$$\min_{a,b} E[(Y - (aX + b))^2]$$

ha soluzione $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ tale che

$$\widehat{a} = \rho_{X,Y} \sqrt{\frac{\mathrm{VAR}[X]}{\mathrm{VAR}[Y]}}$$

inoltre

$$R^2 = 1 - \frac{E[(Y - (\widehat{a}X + \widehat{b}))^2]}{\mathrm{VAR}[Y]} = \rho_{X,Y}^2$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\mathsf{T}$ vettore di va con $X_i \in L^2$ per ogni i; la matrice varianze-covarianze è

$$\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]_{i,j} = \mathrm{COV}[X_i, X_j], \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

- Proprietà di $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$
  - [Simmetria] $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ è simmetrica
  - [Linearità] per ogni A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + b$$

vettore di va in $\mathbb{R}^m$ con

$$E[\boldsymbol{Y}] = AE[\boldsymbol{X}] + b, \qquad \mathrm{COV}[\boldsymbol{Y}] = A\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]A^\mathsf{T}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esercizio. Scrivere una formula per la varianza di

$$a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

- Esempio. $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ sono i prezzi di n titoli, $t = 0, 1$
  - $R_i = \frac{P_i(1) - P_i(0)}{P_i(0)}$ rendimento semplice del titolo $i = 1, \ldots, n$
  - a_i quantità detenuta del titolo $i = 1, \ldots, n$
  - dati $E[R_i] = \mu_i$, $\mathrm{VAR}[R_i] = \sigma_i^2$ e $\mathrm{CORR}[R_i, R_j] = \rho_{ij}$, scrivere formule per il valore atteso e varianza del rendimento di portafoglio

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$
  - $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]_{ii} = \mathrm{VAR}[X_i]$
  - $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ è semi definita positiva: per ogni $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}} \mathrm{COV}[\boldsymbol{X}] \boldsymbol{z} \geq 0$$

  - se $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ non è di rango pieno, esiste una combinazione lineare di $X_1, \ldots, X_n$ degenere (relazione lineare tra le variabili)
- Proprietà simili valgono per la matrice di correlazione

$$\mathrm{CORR}[\boldsymbol{X}]_{i,j} = \rho_{X_i, X_j}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Normale multivariata: $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]$
  - posto $\mu = E[\boldsymbol{X}]$ e $\Sigma = \mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$, se Σ è di rango pieno allora la pdf di $\boldsymbol{X}$ è

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right\}$$

  - se ogni marginale è $N(0,1)$ allora $\boldsymbol{X}$ è multivariata standard

Speranza Matematica

- Esercizio. Calcolare il coefficiente di correlazione per

1. due indicatori di eventi
2. il minimo U e il massimo V di due dadi
3. l'esponenziale bivariata a p. 132
4. due lognormali $Y_1 = e^{X_1}$ e $Y_2 = e^{X_2}$ con X_1, X_2 normale bivariata standard