

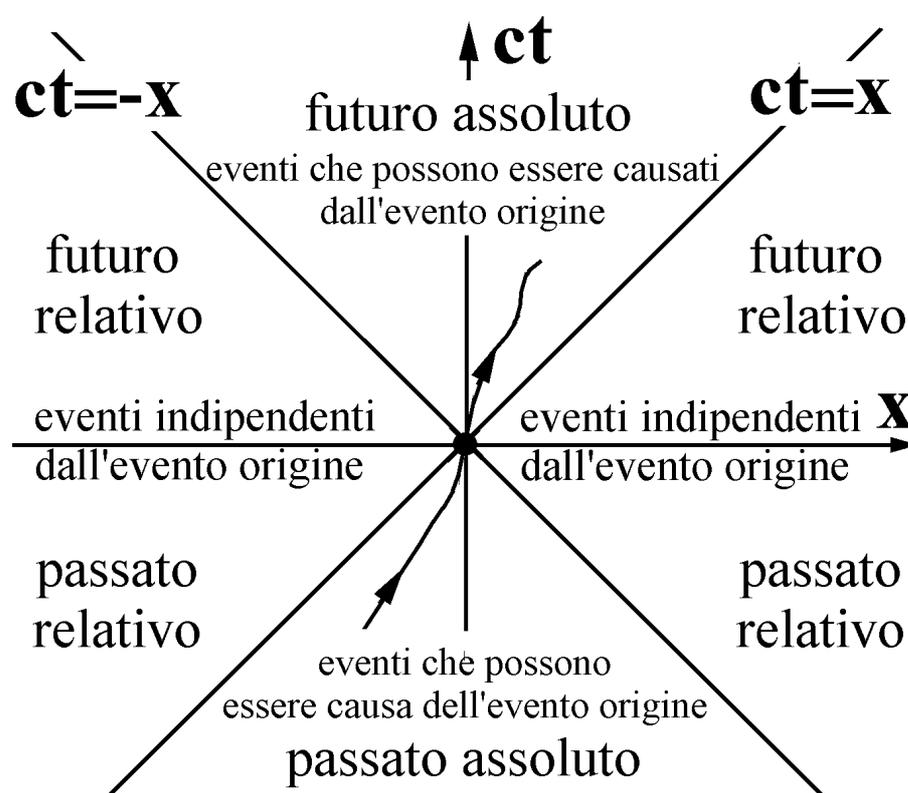
Università degli Studi di Trieste

Corso di Laurea in Fisica

Fernando Tommasini e Alberto Morgante

Correnti, Radiazione e Quanti

Introduzione all'Elettromagnetismo,
alla Relatività Ristretta
e all'Ottica moderna



Terza edizione

Trieste, marzo 2007

Pertanto la densità d'energia magnetostatica può essere scritta nella forma

$$u_{ms}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r})]$$

Integrando su una sfera di raggio tendente all'infinito e tenendo presente che $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ decade con la distanza come o più rapidamente di $1/r^5$, si vede che l'energia magnetostatica vale

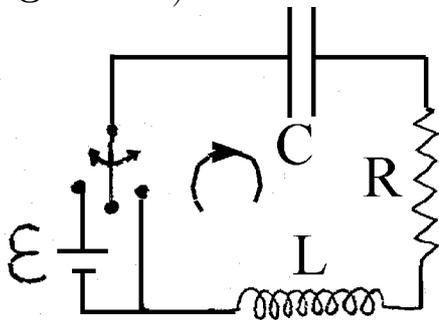
$$U_{ms} = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r})$$

e si vede che, anche in questo caso, l'integrazione può essere limitata ai volumi occupati dai conduttori perché altrove \mathbf{j}_f è nullo.

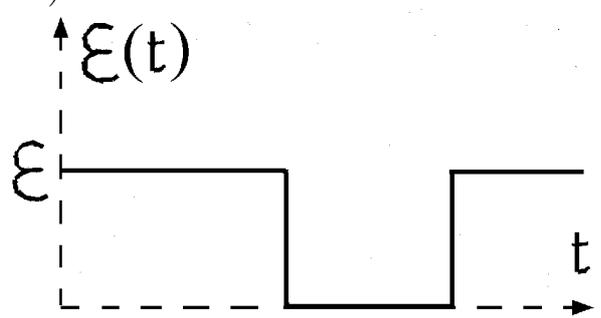
7.5 Circuito RCL in serie in regime transitorio

Fino ad ora abbiamo considerato i circuiti RC, costituiti da un condensatore in serie ad un resistore, ed i circuiti RL, costituiti da un'induttore in serie ad un resistore. Nel primo caso avevamo tacitamente ammesso che l'induttanza del circuito fosse trascurabile, nel secondo avevamo tacitamente ammesso che fosse trascurabile la capacità del circuito. Ora studiamo un circuito con re-

Fig. 7.5: a)



b)



sistenza, capacità ed induttanza in serie, alimentato con forza elettromotrice costante a tratti, e precisiamo quanto detto in precedenza. Per semplicità pensiamo che il generatore sia composto da una batteria di resistenza interna trascurabile e da un deviatore, disposti come in figura 5a). Il deviatore cortocircuita i morsetti del circuito oppure li collega ai morsetti della batteria con tempi di commutazione trascurabili. Quindi la forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$ applicata al circuito ha l'andamento mostrato in figura 5b): è nulla quando i morsetti del circuito sono in corto e vale \mathcal{E} quando i morsetti sono collegati alla batteria. Sappiamo che la circolazione del campo elettrico lungo il circuito, presa nel verso mostrato in figura, vale $RI(t) + Q(t)/C - \mathcal{E}(t)$ ed è uguale alla forza elettromotrice indotta $-LdI(t)/dt$, quindi possiamo scrivere

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}(t) \quad (7.10)$$

Interpretando il primo termine come tensione induttiva, il secondo come tensione resistiva ed il terzo come tensione capacitiva, l'equazione 10) dice che, **in un circuito RCL in serie la somma delle tensioni induttiva, resistiva e capacitiva è uguale alla forza elettromotrice di alimentazione.** Questa interpretazione estende la validità della seconda legge di Kirchhoff anche a circuiti percorsi da correnti dipendenti dal tempo. Si noti che la tensione induttiva è la forza elettromotrice indotta cambiata di segno, ovvero è la parte della forza elettromotrice che deve essere applicata per compensare la forza elettromotrice indotta.

Nella situazione considerata in figura 5, $\mathcal{E}(t)$ ha derivata nulla ad ogni istante diverso dagli istanti di commutazione, quindi conviene prendere la derivata temporale dell'equazione 10) e scrivere l'equazione

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) + \Gamma \frac{d}{dt}I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0 \quad (7.11)$$

dove $\Gamma = R/L$ è la frequenza di smorzamento e

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.12)$$

è una frequenza che acquisterà grande rilevanza nel seguito. Per semplificare la scrittura delle condizioni iniziali conviene indicare con $\dot{I}(t)$ e $\ddot{I}(t)$ le derivate prime e seconde rispetto al tempo e riscrivere l'equazione 11) nella forma

$$\ddot{I}(t) + \Gamma \dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = 0 \quad (7.13)$$

Questa equazione vale a qualunque istante diverso dall'istante di commutazione e può essere risolta quando si conoscono le condizioni del circuito a tale istante. Il metodo di soluzione comporta i seguenti passi.

- Calcolo delle radici α_1 e α_2 dell'equazione $\alpha^2 + \Gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$:

$$\alpha_1 = -\frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\Gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (7.14)$$

- Scrittura della soluzione nella forma

$$I(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t} \quad \text{oppure} \quad I(t) = (a + bt)e^{-\Gamma t/2} \quad (7.15)$$

a seconda che le radici siano distinte oppure coincidenti.

- Calcolo delle costanti a e b in modo consistente con le condizioni del circuito all'istante di commutazione.

Nel seguito limitiamo l'attenzione alla **corrente di carica** ed alla **corrente di scarica**. La prima insorge quando il deviatore, tenuto a lungo sul corto nel passato, viene portato sulla batteria, la seconda insorge quando il deviatore, tenuto a lungo sulla batteria nel passato, viene portato sul corto.

La corrente iniziale $I(0)$ è nulla in entrambi i casi, mentre la sua derivata iniziale $\dot{I}(0)$ vale \mathcal{E}/L nel primo caso e vale $-\mathcal{E}/L$ nel secondo. Lo si vede dall'equazione 10) tenendo presente che nel processo di carica $Q(0) = 0$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}$, mentre nel processo di scarica $Q(0) = C\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}(t) = 0$.

Quando $\omega_0 = \Gamma/2$, le due radici coincidono e le condizioni iniziali sono soddisfatte ponendo $a = 0$ e $b = \pm\mathcal{E}/L$, con segno + per la corrente di carica e segno - per la corrente di scarica. Quindi la corrente evolve con l'andamento

$$I(t) = \pm \frac{\mathcal{E}}{L} t e^{-\Gamma t/2}$$

Come mostrato in figura 6 la corrente di carica aumenta sino al tempo $t = 2/\Gamma = 2\tau_L$, a tale istante prende il valore di picco $0.74 \mathcal{E}/R$, poi decade quasi esponenzialmente. Questo andamento prende il nome di **smorzamento critico**.

Fig. 7.6

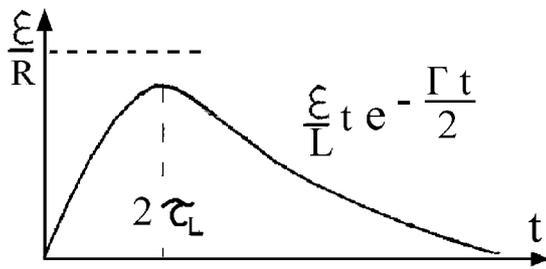
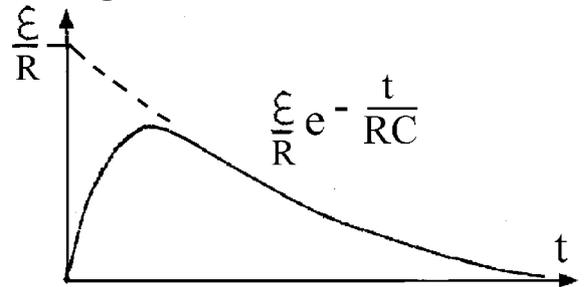


Fig. 7.7



Quando ω_0 è diverso da $\Gamma/2$ le radici α_1 ed α_2 sono distinte e le condizioni iniziali comportano che $a + b = 0$, $\alpha_1 a + \alpha_2 b = \pm\mathcal{E}/L$. Quindi la corrente evolve con andamento

$$I(t) = \frac{\pm\mathcal{E}/L}{\alpha_1 - \alpha_2} [e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}] \quad (7.16)$$

con segno + per la corrente di carica e segno - per la corrente di scarica. Le equazioni 14) e 16) ed un modesto calcolatore consentono di calcolare le correnti di carica e scarica in qualunque caso. Qui, limitiamo l'attenzione a due situazioni estreme contraddistinte da valori piccolissimi o grandissimi del

$$\text{fattore di merito} = \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (7.17)$$

• Per $\omega_0 \ll \Gamma$ la radice α_2 differisce poco da $-\Gamma$, mentre la radice α_1 è ben approssimata da

$$\alpha_1 = -\frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\Gamma^2}} \approx -\frac{\omega_0^2}{\Gamma} = -\frac{1}{RC}$$

Si noti che $1/RC = L/R\omega_0^2 = \Gamma(\omega_0/\Gamma)^2$ è enormemente minore di Γ , quindi $\alpha_1 - \alpha_2$ non differisce apprezzabilmente da Γ . Pertanto la corrente di carica è ben approssimata da

$$I(t) \approx \frac{\mathcal{E}}{R} [e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\Gamma t}]$$

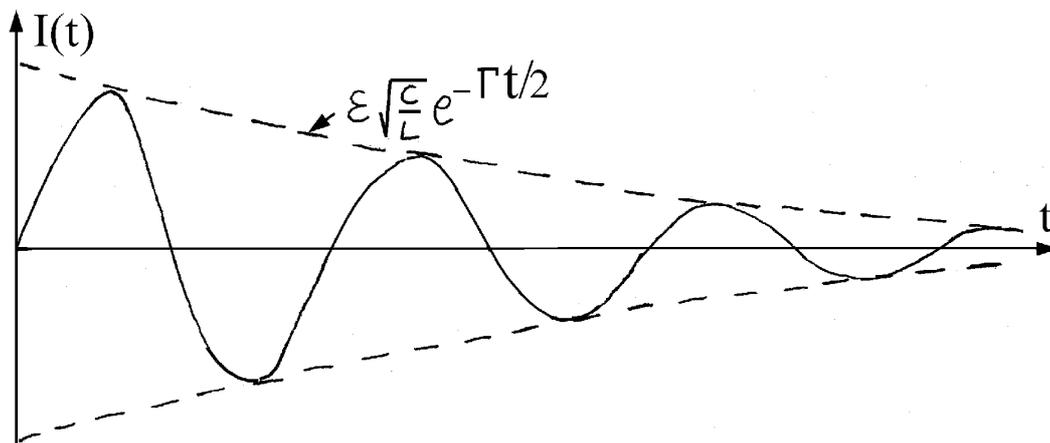
Come mostrato in figura 7, la corrente raggiunge un valore di picco minore di \mathcal{E}/R , poi decade esponenzialmente con **costante tempo** RC . Infatti il termine $e^{-\Gamma t}$ diventa ben presto trascurabile rispetto a $e^{-t/RC}$.

• Per $\omega_0 \gg \Gamma$ le radici sono approssimate da $\alpha_1 = -\Gamma/2 + i\omega_0$ e $\alpha_2 = -\Gamma/2 - i\omega_0$. Sostituendo questi valori nell'equazione 16) si ottiene la corrente di carica

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}/L}{2i\omega_0} e^{-\Gamma t/2} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\Gamma t/2} \sin(\omega_0 t) \quad (7.18)$$

Come mostrato in figura 8, la corrente oscilla con andamento sinusoidale smorzato di frequenza ω_0 e frequenza di smorzamento $\Gamma/2$. Per $t = 1/\Gamma$ il fattore esponenziale vale $e^{-1/2} \approx 0.61$, mentre l'argomento del seno è proprio il fattore di merito ω_0/Γ del circuito. Ad esempio, in un circuito con fattore di merito 100 la corrente compie $100/2\pi \approx 16$ oscillazioni complete prima che il fattore esponenziale si riduca a 0.61.

Fig. 7.8



ESERCIZI

1) Un circuito RCL con $R = 2 \Omega$ ed $L = 2 \cdot 10^{-5} H$ è alimentato con forza elettromotrice che passa istantaneamente da \mathcal{E} a zero e viceversa con periodo di $200 ms$. Riportare in grafico l'andamento temporale della tensione ai capi della resistenza nei seguenti casi: a) $\omega_0 = \Gamma/2$, b) $\omega_0 \ll \Gamma$, c) $\omega_0 \gg \Gamma$.

7.6 Trasferimenti di energia nel circuito RCL

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto le correnti di carica e di scarica nel circuito RCL in serie, ora consideriamo gli aspetti energetici.

La figura 9 mostra la situazione nel condensatore in fase di carica: la corrente ed il campo \mathbf{E} nel condensatore sono diretti verso destra, \mathbf{B} circola uscendo dal foglio in alto ed il vettore di Poynting è orientato verso l'interno, quindi l'energia fluisce dal vuoto al condensatore. L'opposto avviene in fase di scarica: \mathbf{E} conserva lo stesso verso, ma la corrente ed il campo \mathbf{B} hanno

Fig. 7.9

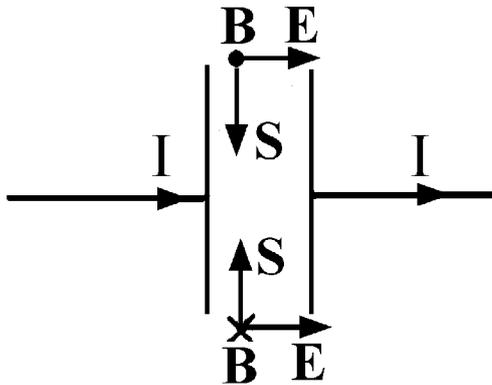
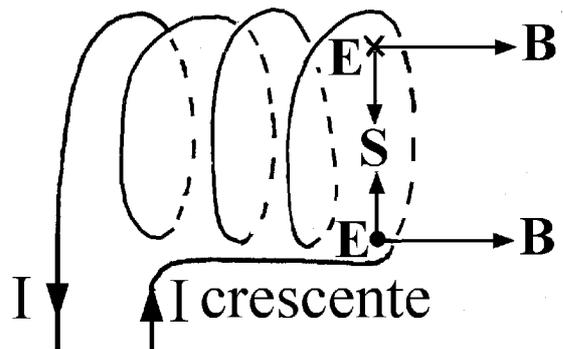


Fig. 7.10



verso opposto, quindi \mathbf{S} è orientato verso l'esterno e l'energia fluisce dal condensatore al vuoto.

La figura 10 mostra la situazione nell'induttore percorso da corrente crescente: \mathbf{B} aumenta nel tempo, mentre il campo ELETTRICO \mathbf{E} fornito dalla legge di induzione circola uscendo dal foglio in basso, quindi il vettore di Poynting punta verso l'interno e trasferisce energia dal vuoto all'induttore.

Ora consideriamo un circuito RCL in serie con fattore di merito ω_0/Γ tanto grande da poter ammettere che, anche dopo un gran numero di oscillazioni, la corrente di scarica non differisca apprezzabilmente da

$$I(t) = -\mathcal{E}\sqrt{C/L}\sin(\omega_0 t)$$

In tal caso la carica del condensatore ha l'andamento $Q(t) = C\mathcal{E}\cos(\omega_0 t)$, per convincersene basta notare che la sua derivata è proprio la corrente. Pertanto l'energia elettromagnetica del sistema risulta

$$U_{em} = \frac{1}{2} \left[LI^2(t) + \frac{Q^2(t)}{C} \right] = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$$

e non dipende dal tempo. Quindi l'energia viene trasferita alternativamente dal condensatore all'induttore e viceversa. Naturalmente non è proprio così perché il fattore di merito non è mai infinito e l'energia $U_{em}(t)$ immagazzinata nel circuito viene progressivamente dissipata nella resistenza. Per valutare $U_{em}(t)$ notiamo che quando la corrente è massima il condensatore è scarico, quindi tutta l'energia è immagazzinata nell'induttore ed è proporzionale al quadrato della corrente. Ma la corrente di picco decade con andamento $e^{-\Gamma t/2}$, quindi l'energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito decade con andamento

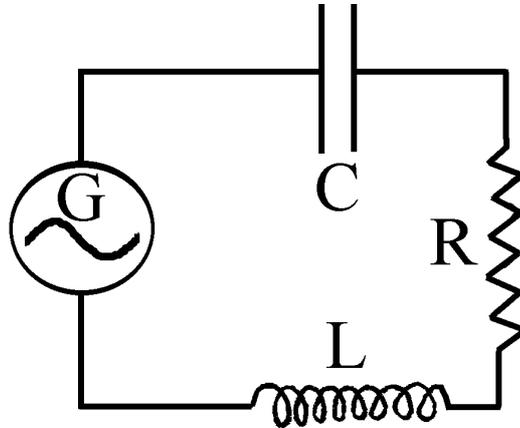
$$U_{em}(t) = U_{em}(0)e^{-\Gamma t} \quad (7.19)$$

Dunque la costante tempo induttiva $\tau_L = 1/\Gamma = L/R$ assume il significato di **tempo di rilassamento dell'energia** nel circuito autooscillante.

7.7 Circuito RCL in serie in regime armonico

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che la forma d'onda di $I(t)$ nel circuito RCL può essere molto diversa dalla forma d'onda di $\mathcal{E}(t)$. Ora, con riferimento alla figura 11, mostriamo che vale un fatto importantissimo: quando un

Fig. 7.11



circuito composto da elementi lineari come condensatori, induttori e resistori è alimentato da un generatore di forza elettromotrice armonica con frequenza ω anche la corrente è armonica con frequenza ω , e la tensione ai capi di un qualunque elemento circuitale è una copia della forza elettromotrice di alimentazione, variata in ampiezza e traslata nel tempo. Per procedere senza immergerci in calcoli noiosi conviene armarsi di un metodo che si rivelerà prezioso in molte circostanze. Cominciamo a pensare che la carica $Q(t)$ del condensatore oscilli in modo armonico e la descriviamo come la parte reale della “carica complessa”

$$Qe^{-i\omega t} \quad (7.20)$$

Si intende che anche Q è complesso: il suo modulo, $|Q| = \sqrt{QQ^*}$, è il valore di picco della carica e la sua fase è la fase di $Q(t)$ al tempo zero. Ricordiamo che l'angolo di fase viene contato in senso antiorario nel piano complesso, quindi il segno negativo dell'esponente significa che la “carica complessa ruota in senso orario”. Ad esempio nel caso considerato in figura 12 la fase di Q vale $\pi/6$, quindi $Q(t)$ ha andamento $Q(t) = |Q| \cos(\pi/6 - \omega t)$. Poiché la corrente e la carica reali sono legate dalla relazione $I(t) = dQ(t)/dt$, anche la corrente è armonica con frequenza ω e le grandezze complesse $Ie^{-i\omega t}$ e $Qe^{-i\omega t}$ sono legate dalla relazione

$$I = -i\omega Q \quad \text{ovvero} \quad Q = i\frac{I}{\omega}$$

Come mostrato in figura 13, la carica complessa e la corrente complessa ruotano insieme in senso orario nel piano complesso, con carica “in ritardo” di $\pi/2$ rispetto alla corrente e con valori di picco tali che $|I| = \omega |Q|$.

Veniamo alla tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore in regime armonico. È legata alla carica dalla relazione $V_C(t) = Q(t)/C$, quindi anche $V_C(t)$ è

Fig. 7.12

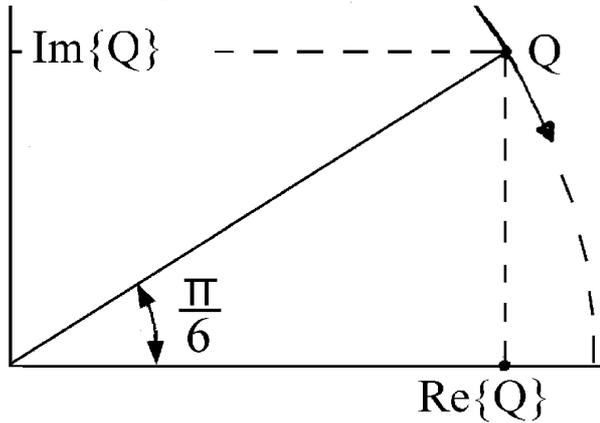
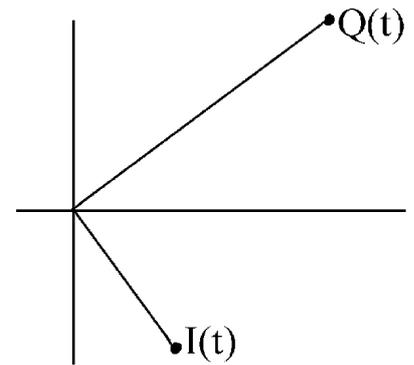


Fig. 7.13



armonica con frequenza ω e le grandezze complesse V_C ed I sono legate dalla relazione

$$V_C = \frac{i}{\omega C} I$$

che generalizza la legge di Ohm al caso del condensatore in regime armonico. La grandezza $i/\omega C$ prende il nome di **impedenza capacitiva**. Il suo modulo è il rapporto tra i valori di picco della tensione e della corrente e la sua **fase** $\pi/2$ è lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente. Si noti che, a parità di tensione ai capi, un condensatore è percorso da corrente tanto più intensa quanto più alta è la frequenza. Ma la corrente e la tensione sono in quadratura (sfasate di $\pi/2$) e ciò comporta che **la potenza dissipata nel condensatore risulta nulla**. Per capire bene questo punto pensiamo di aver scelto l'origine dei tempi in modo che I sia reale positivo. In tal caso la corrente reale ha l'andamento $I(t) = I \cos(\omega t)$ e la tensione reale ha l'andamento $(I/\omega C) \sin(\omega t)$, quindi la potenza $I(t)V_C(t)$ assorbita dal condensatore dipende dal tempo come $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \sin(2\omega t)/2$ e ha davvero valor medio temporale nullo. Insomma, in un periodo di oscillazione il condensatore riceve tanta energia quanta ne restituisce!

Discorso analogo vale per un'induttore in regime armonico: la tensione ai capi dell'induttore deve equilibrare la forza elettromotrice indotta, quindi è legata alla corrente dalla relazione $V_L(t) = LdI(t)/dt$. Ciò implica che le grandezze complesse V_L ed I sono legate dalla relazione

$$V_L = -i\omega L I$$

che generalizza la legge di Ohm al caso dell'induttore in regime armonico. La grandezza $-i\omega L$ è l'**impedenza induttiva**, ha fase $-\pi/2$ e modulo proporzionale alla frequenza. A parità di tensione l'induttore è percorso da corrente tanto più grande quanto più piccola è la frequenza, ma anche in tal caso la corrente e la tensione ai capi sono in quadratura, quindi **la potenza dissipata nell'induttore è nulla**.

Infine consideriamo il caso di una resistenza in regime armonico. La legge di Ohm $V_R(t) = RI(t)$ comporta che le grandezze complesse V_R ed I sono

legate dalla relazione $V_R = RI$, quindi la potenza assorbita e dissipata dalla resistenza dipende dal tempo con andamento $W(t) = R | I |^2 \sin^2(\omega t)$ e ha valor medio temporale

$$W = \frac{R | I |^2}{2}$$

Nel circuito RCL in figura 11 tutti gli elementi sono percorsi dalla stessa corrente e l'equazione 10) mostra che la forza elettromotrice complessa applicata al circuito vale

$$\mathcal{E} = [-i\omega L + R + \frac{i}{\omega C}]I \quad (7.21)$$

Il rapporto $Z = \mathcal{E}/I$ è l'**impedenza** del circuito RCL in serie, vale

$$Z = R - i\omega L + \frac{i}{\omega C} \quad (7.22)$$

ed è null'altro che la somma delle impedenze dei tre elementi.

Ribadiamo che quando descriviamo le tensioni, le correnti e le cariche come vettori rotanti nel piano complesso, intendiamo che solo le parti reali hanno significato fisico. Ma attenzione! **L'impedenza è un grandezza complessa non rotante, con modulo e fase dotate di significato fisico preciso**: il modulo è il rapporto tra i valori di picco della tensione e della corrente, la fase è lo sfasamento della tensione rispetto alla corrente.

Poiché il condensatore e l'induttore non dissipano energia, la potenza dissipata dall'intero circuito RCL è quella dissipata nel resistore e vale

$$W = \frac{1}{2}R | I |^2 = \frac{| I | | \mathcal{E} |}{2} \frac{R}{| Z |} = I_{eff} \mathcal{E}_{eff} \cos \phi \quad (7.23)$$

I valori efficaci della corrente e della tensione, I_{eff} ed \mathcal{E}_{eff} , sono $\sqrt{2}$ volte minori dei valori di picco ed **il fattore di potenza** $\cos \phi = R / | Z |$ è **null'altro che il coseno della fase dell'impedenza**.

7.8 Curva di risonanza del circuito RCL

Cominciamo a notare che l'impedenza del circuito RCL in serie, data dall'equazione 22), può essere riscritta nella forma

$$Z = R \left[1 - \frac{iL}{R} \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right) \right] = R \left[1 - \frac{i}{\Gamma \omega} (\omega^2 - \omega_0^2) \right]$$

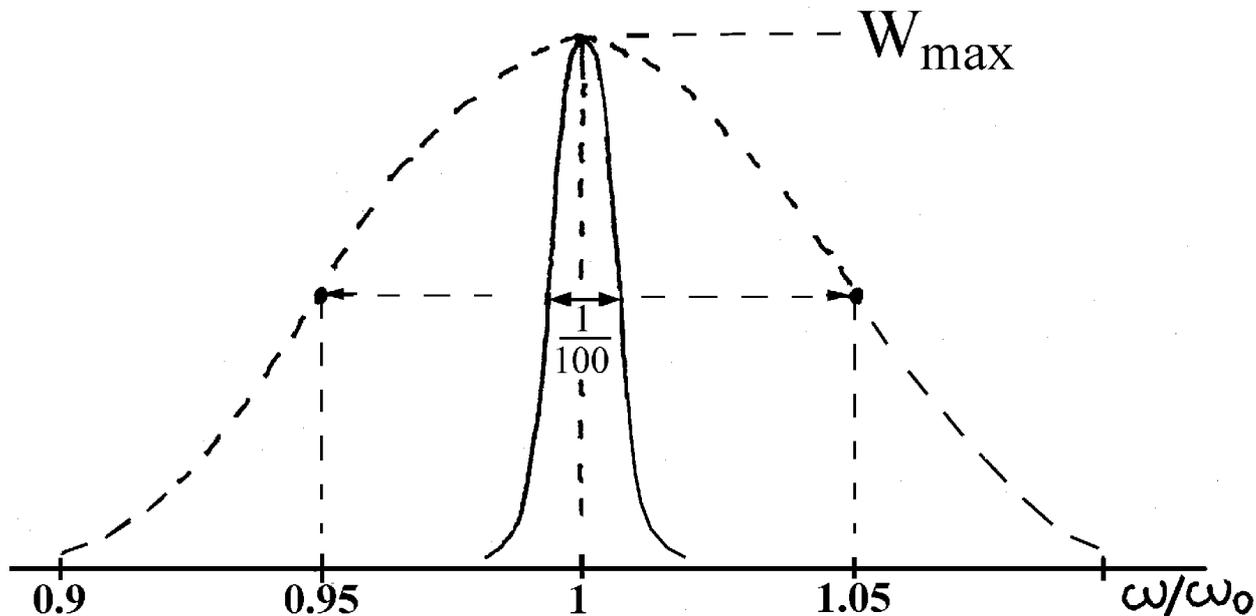
e che il suo modulo quadro vale

$$|Z|^2 = ZZ^* = R^2 \left[1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\Gamma \omega)^2} \right] = R^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma \omega)^2}{(\Gamma \omega)^2}$$

Pertanto il valor medio temporale della potenza assorbita dal circuito RCL alimentato con forza elettromotrice di picco costante e frequenza variabile risulta

$$W(\omega) = \frac{R|I|^2}{2} = \frac{R|\mathcal{E}|^2}{2|Z|^2} = \frac{|\mathcal{E}|^2}{2R} \frac{(\Gamma\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2} \quad (7.25)$$

Fig. 7.14 Curve di risonanza $W(\omega)$ per due valori del fattore di merito



Le curve continua e tratteggiata in figura 14 mostrano gli andamenti di $W(\omega)$ rispettivamente per $\omega_0/\Gamma = 100$ e per $\omega_0/\Gamma = 10$. Entrambe le curve raggiungono il valore massimo $W_{max} = |\mathcal{E}|^2 / 2R$ per $\omega = \omega_0$, ma hanno larghezze a metà altezza inversamente proporzionali ai fattori di merito. Precisamente possiamo dire quanto segue.

- Quando la frequenza ω è uguale alla frequenza di risonanza ω_0 il circuito risuona assorbendo la potenza massima $|\mathcal{E}|^2 / 2R$.
- Quando il fattore di merito è grande, come nei casi considerati in figura, la potenza assorbita si riduce alla metà di quella massima per $\omega = \omega_0 \pm \Gamma/2$, quindi Γ acquista l'ulteriore significato di **larghezza a metà altezza della curva di risonanza**.

Infine notiamo che per $\omega \ll \omega_0$ l'induttore gioca un ruolo trascurabile e l'impedenza del circuito si riduce a $R + i/\omega C$. In particolare per $\omega \ll RC$ l'impedenza è ben approssimata da $i/\omega C$, ma attenzione: la resistenza gioca sempre un ruolo importante perchè è l'unico elemento a dissipare potenza; la corrente di picco vale $\approx \mathcal{E}\omega C$ e la potenza dissipata risulta $W \approx R(\mathcal{E}\omega C)^2/2$. Invece, per $\omega \gg \omega_0$ gioca un ruolo trascurabile il condensatore e l'impedenza del circuito si riduce a $R - i\omega L$. In particolare per $\omega \gg R/L$ l'impedenza è ben approssimata da $-i\omega L$, la corrente di picco vale $\approx \mathcal{E}/\omega L$ e la potenza dissipata risulta $W \approx R(\mathcal{E}/\omega L)^2/2$.

ESERCIZI

1) Un circuito RCL in serie con $R = 0.2 \Omega$, $C = 1 \mu F$ e $L = 100 \mu H$, è alimentato con tensione di picco di $10 V$. Calcolare: a) la frequenza di risonanza, il fattore di merito e la larghezza della risonanza, b) la corrente e la potenza assorbita in piena risonanza, c) la corrente, la potenza assorbita e la fase dell'impedenza quando la frequenza vale $\omega_0/10$, d) la corrente, la potenza assorbita e la fase dell'impedenza quando la frequenza vale $10 \omega_0$. e) Poi dire quale elemento circuitale può essere trascurato nella situazione c) e quale nella situazione d).

2) Considerare un circuito RCL in serie con $R = 0.02 \Omega$, $C = 50 pF$ ed $L = 0.2 \mu H$ ed eseguire i calcoli richiesti nell'esercizio precedente.

3) In un circuito RCL in serie con morsetti in corto, due massimi di corrente successivi sono raggiunti ai tempi $t = 0$ e $t = 0.1 s$ e hanno i valori di $10 A$ e $5 A$ rispettivamente. La frequenza di oscillazione vale $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$ e l'energia del circuito al tempo zero è di $10 J$. Calcolare: a) il coefficiente di autoinduzione, la resistenza, la capacità ed il fattore di merito del circuito. Poi pensare che il circuito sia alimentato con tensione di picco di $100 V$ e frequenza di $2 \cdot 10^4 s^{-1}$ e calcolare: b) l'impedenza del circuito, c) la potenza assorbita, d) i moduli delle tensioni resistiva, induttiva e capacitiva.

4) Un solenoide toroidale di circonferenza media $10 cm$ è costituito da 10^3 spire di area $1 cm^2$ fatte con filo di rame di diametro $0.1 mm$. a) Calcolare il coefficiente di autoinduzione e la resistenza del sistema. b) Poi si pensi che gli estremi dell'avvolgimento, collegati ad una batteria da $10 V$ nel passato, siano messi in corto istantaneamente al tempo zero e calcolare l'energia magnetica residua dopo $1 s$.

5) Con un circuito RCL si vuole produrre un campo elettrico armonico, di frequenza $\omega = 10^8 s^{-1}$ ed ampiezza di picco $100 V/m$, tra le armature di un condensatore di sezione $10 cm^2$, distanti $4 mm$ e poste nel vuoto. a) Calcolare la corrente di picco. b) Scegliere il valore dell'induttanza in modo che il circuito risuoni proprio alla frequenza voluta. c) Calcolare l'energia immagazzinata nel circuito nelle condizioni di lavoro richieste. d) Descrivere i flussi di energia nel sistema.

Capitolo 8

Circuiti magnetici

In questo capitolo studiamo i **materiali magnetici duri**, usati per costruire magneti permanenti, ed i **materiali magnetici dolci**, usati per costruire elettromagneti, induttori, schermi magnetici e trasformatori di tensione.

8.1 Misure dei cicli di isteresi dei ferromagneti

Per studiare le proprietà statiche dei materiali magnetici possiamo usare la configurazione sperimentale schematizzata in figura 1. Un solenoide toroidale

Fig. 8.1

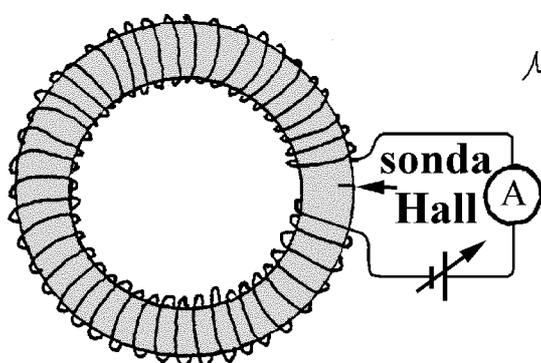
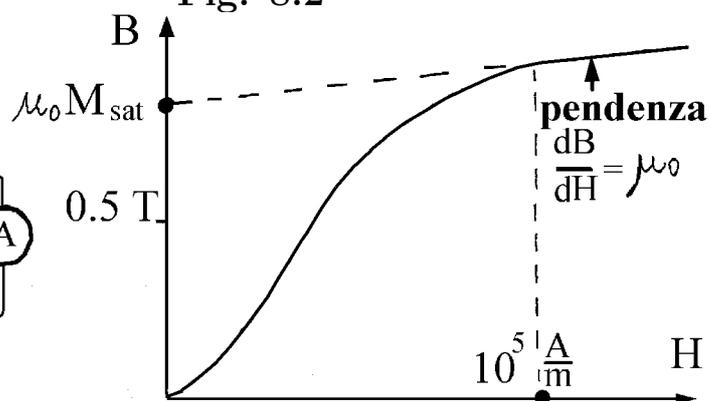


Fig. 8.2



con sezione trasversa di area S , circonferenza media di lunghezza l e numero di spire N , viene riempito omogeneamente con il materiale magnetico oggetto di studio. Viene fatta passare la corrente I nell'avvolgimento e, mediante una sonda Hall inserita in un alloggiamento sottilissimo, viene misurato B . Sappiamo che la circolazione di \mathbf{H} lungo un percorso che attraversa tutte le spire vale NI , comunque il solenoide sia riempito. E, poiché il materiale è omogeneo, possiamo valutare l'intensità del campo \mathbf{H} sulla circonferenza media come

$$H = \frac{NI}{l} \quad (8.1)$$

Ora pensiamo che inizialmente la ciambella non sia magnetizzata e la corrente sia nulla, ovvero pensiamo che lo stato magnetico iniziale del materiale sia individuato dal punto $(0, 0)$ del piano (H, B) . Poi facciamo aumentare

la corrente per passi successivi, leggiamo I sull'amperometro, calcoliamo H con l'equazione 1), misuriamo B con la sonda Hall e riportiamo i risultati nel piano (H, B) , come in figura 2. La curva ottenuta prende il nome di **curva di prima magnetizzazione**. La sua pendenza dB/dH aumenta all'aumentare di H sino a raggiungere valori che possono essere enormemente maggiori di μ_0 , poi diminuisce sino a raggiungere il valore asintotico μ_0 . Ricordando che $B = \mu_0(H + M)$, possiamo dedurre che M raggiunge un valore asintotico poi smette di aumentare all'aumentare di H . L'intersezione dell'asintoto con l'asse B fornisce il valore asintotico $\mu_0 M_{sat}$, detto **campo di saturazione**. Raggiunta la saturazione, procediamo a misure di H e B per valori decrescenti della corrente sino a raggiungere la saturazione per valori di H negativi, poi torniamo ad aumentare gradualmente la corrente e continuiamo a misurare H e B sino a raggiungere nuovamente la saturazione. La curva chiusa simmetrica così ottenuta, mostrata in figura 3, prende il nome di **ciclo di isteresi completo**. I punti del piano (H, B) interni al

Fig. 8.3

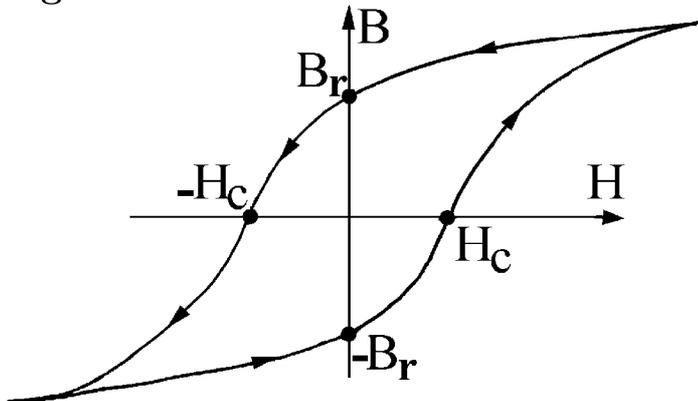
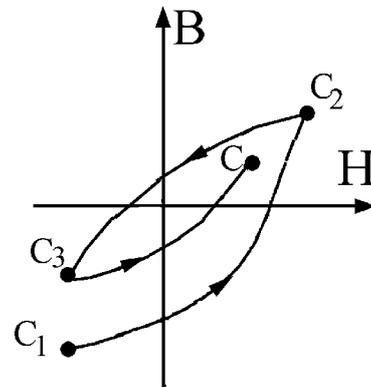


Fig. 8.4



ciclo di isteresi completo individuano possibili stati magnetici del materiale. Procedendo come mostrato in figura 4, possiamo portare il materiale in uno qualunque di tali stati. Ad esempio, per raggiungere il punto C a partire dal punto C_1 , aumentiamo la corrente sino a raggiungere un punto C_2 scelto con un po' di oculatezza, poi diminuiamo la corrente sino a raggiungere un punto C_3 , torniamo ad aumentare la corrente sino a raggiungere un intorno di C e, se non siamo soddisfatti, proseguiamo con passetti suggeriti dall'esperienza dei passi precedenti. Questa procedura viene usata anche per smagnetizzare il materiale, ovvero per portarlo nel punto $(0, 0)$ del piano (H, B) .

Dalle misure dei cicli di isteresi completi si ottengono le seguenti grandezze caratteristiche dei materiale magnetici.

- **Campo di saturazione** $\mu_0 M_{sat}$. Si determina tracciando gli asintoti del ciclo di isteresi completo sino ad incontrare l'asse B .
- **Campo residuo** B_r . Si legge nei punti di intersezione del ciclo di isteresi completo con l'asse B , come mostrato in figura 3. Evidentemente il campo residuo è sempre minore del campo di saturazione.
- **Campo coercitivo** H_c . Si legge nei punti di intersezione del ciclo di

isteresi completo con l'asse H . Segno a parte è il campo H che, a partire da condizioni di saturazione, deve essere applicato per compensare esattamente M e ridurre B a zero.

- **Permeabilità magnetica differenziale massima.** Si ottiene dividendo per μ_0 la pendenza dB/dH del ciclo di isteresi completo, valutata nei punti di attraversamento dell'asse H .

- **Area del ciclo di isteresi completo.** Può essere valutata per integrazione grafica. Approssimativamente risulta uguale a $4B_rH_c$.

Oltre a tali grandezze è necessario conoscere la conducibilità elettrica e la **temperatura di Curie** T_C , temperatura al di sopra della quale il materiale diventa un normale paramagnete con permeabilità poco diversa dall'unità. Aggiungiamo che, per applicazioni in campo radiotecnico, è importante conoscere anche la **frequenza di taglio** delle proprietà magnetiche, frequenza che viene misurata con il metodo descritto nel paragrafo 4.

ESERCIZI

1) Un materiale ha campo di saturazione $\mu_0 M_{sat} = 1.2 T$, campo coercitivo $H_c = 4 \cdot 10^4 A/m$, campo residuo $B_r = 1 T$ e permeabilità differenziale massima 10^4 . Disegnare il ciclo di isteresi completo e mostrare che la sua area è una densità di energia.

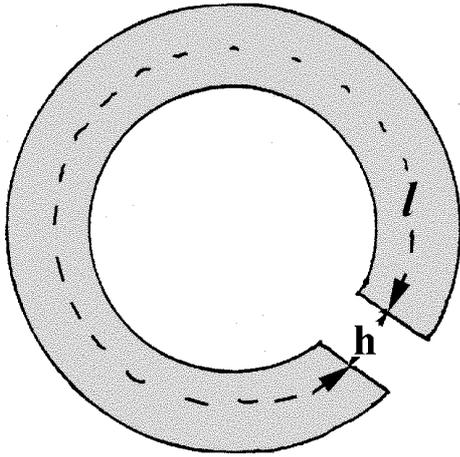
8.2 Magneti permanenti

I materiali con grandi campi coercitivi, grandi campi di saturazione ed alte temperature di Curie sono adatti a costruire magneti permanenti e vengono indicati genericamente come **ferromagneti duri**. Le grandezze caratteristiche di alcuni ferromagneti duri molto usati sono riportate in tabella.

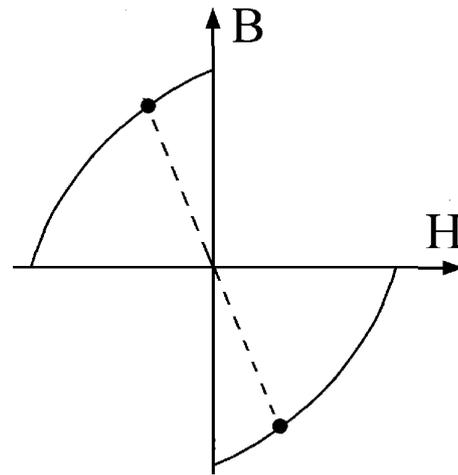
MATERIALE	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	B_r (T)	H_c (A/m)	T_C (K)
Acciaio al carbonio	0.9	0.7	5000	1000
Ticonal	1.3	1.2	$5 \cdot 10^4$	900
Samarium-Cobalto	0.9	0.9	$7 \cdot 10^5$	600
Neodimio-Ferro-Boro	1.3	1.3	10^6	1000

Ora pensiamo che una ciambella ferromagnetica manchi di una fettina di spessore h , come in figura 5a), e diamo il nome di **gap** o **traferro** allo spazio lasciato vuoto dalla rimozione della fettina. Pensiamo che in passato la ciambella sia stata avvolta con spire distribuite su tutta la lunghezza l della parte piena, sia stata scaldata sopra la temperatura di Curie e sia stata lasciata raffreddare in presenza di una corrente tanto intensa da mantenere ogni regione in condizioni di saturazione. Domandiamo: quali campi sono presenti dopo la rimozione dell'avvolgimento? Sappiamo che in assenza di corrente elettrica la circolazione di \mathbf{H} è nulla, quindi i valori di H nel materiale e nel

Fig. 8.5: a)



b)



gap sono tali che

$$Hl + H_{gap}h = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{gap} = -Hl/h$$

Ma \mathbf{B} si conserva nell'attraversare l'interfaccia materiale-gap, quindi B è uguale a $\mu_0 H_{gap}$ sia nel gap, sia nella ciambella, e ciò comporta che H e B nella ciambella sono legati dalla relazione

$$B = -\mu_0 H \frac{l}{h}$$

rappresentata graficamente dal segmento tratteggiato in figura 5b). In condizioni ottimali lo stato magnetico è rappresentato da uno dei punti di intersezione del segmento con il ciclo di isteresi completo, ma in generale il materiale tende a smagnetizzarsi ed il suo stato magnetico evolve più o meno lentamente verso l'origine. Tuttavia il processo di smagnetizzazione dei materiali considerati in tabella è lentissimo a temperatura ambiente, inapprezzabile sull'arco di anni, tanto da poter ritenere che lo stato magnetico di un buon magnete rimanga permanentemente sul ciclo di isteresi completo.

Per barre cilindriche il calcolo dei campi presenti dopo la rimozione della corrente che le aveva portate in saturazione non è semplice in generale, ma diventa semplice per barre di Samario-Cobalto e di Neodimio-Ferro-Boro. Con ottima approssimazione, queste barre rimangono permanentemente magnetizzate con $M = M_{sat}$, quindi il campo \mathbf{H} è il campo prodotto dalle densità superficiali di "carica magnetica" $\pm M_{sat}$ localizzate sulle basi e può essere calcolato con un modesto calcolatore. In particolare i valori di B sull'asse sono dati dalle equazioni 4.17) e 4.17').

ESERCIZI

1) Una ciambella di sezione 10 cm^2 e circonferenza media di 50 cm manca di una fetta di spessore 5 mm . Il materiale della ciambella ha campo coercitivo 10^5 A/m , campo residuo 0.5 T e campo di saturazione $\mu_0 M_{sat} = 0.7 \text{ T}$. La ciambella è stata portata in saturazione da un avvolgimento percorso da

corrente, poi l'avvolgimento è stato rimosso. Valutare approssimativamente: a) i campi H e B nel materiale, b) i campi H e B nel gap, c) la densità lineare di corrente sul mantello.

2) La ciambella in figura 5 ha sezione di 25 cm^2 , gap di 2 mm , circonferenza media di 50 cm ed è avvolta da 2000 spire. La misura di B nel gap in funzione della corrente conduce ai risultati riportati in tabella, ottenuti in ordine temporale da sinistra a destra.

$I (A)$	0	0.1	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0.1	-0.1
$B (T)$	-0.1	0	0.2	0.6	0.85	0.4	0.2	0.1	0
$H(A/m)$									

a) Aggiungere alla tabella i valori di H nel materiale, b) riportare in grafico B in funzione di H , c) valutare il campo residuo, il campo coercitivo ed il campo di saturazione.

3) La ciambella in figura 5 è magnetizzata permanentemente con $M = 10^6 \text{ A/m}$, ha circonferenza media di 1 m e gap di 1 cm . Calcolare: a) i campi B ed H nel materiale, b) la densità lineare di corrente di mantello, c) le densità superficiali di “carica magnetica”.

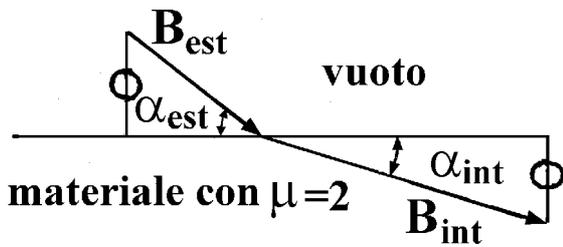
8.3 Campi MAGNETICI nei materiali lineari

I materiali con campi coercitivi molto piccoli e con permeabilità molto grandi costituiscono la classe dei **materiali magnetici dolci**, ben rappresentata dai materiali considerati nella tabella seguente. In prima approssimazione i cicli di isteresi dei materiali considerati in tabella si riducono a rette passanti per l'origine del piano (H, B) con pendenza μ_{max} . Ma attenzione: si deve intendere che le permeabilità μ_{max} riportate in tabella si riferiscono a situazioni quasi magnetostatiche. Per campi oscillanti, le permeabilità diminuiscono notevolmente all'aumentare delle frequenze di oscillazione; a frequenze di interesse radiotecnico solo alcune ferriti conservano alta permeabilità.

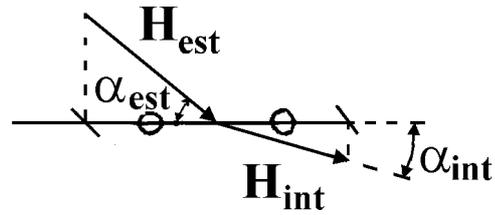
MATERIALE	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	B_r (T)	H_c (A/m)	μ_{max}	ν taglio (MHz)
Ferrosilicio	1.8	1.1	40	10000	0.1-100
Ferriti	0.4	0.05	20	2000	
Mumetal	0.7	0.6	4	70000	
Supermalloy	0.7	0.1	0.1	1000000	

Per prepararci a studiare alcune applicazioni dei materiali magnetici dolci cominciamo a considerare i campi MAGNETICI \mathbf{H} e \mathbf{B} alle interfacce vuoto-materiale. In figura 6, per illustrare con chiarezza la situazione, abbiamo considerato il caso non realistico di un materiale lineare con $\mu = 2$, ed abbiamo disegnato i due campi in uno stesso punto dell'interfaccia. Abbiamo

Fig. 8.6: a)



b)



indicato con α_{est} ed α_{int} gli angoli di radenza formati dal campo MAGNETICO con il piano d'interfaccia, all'esterno ed all'interno del materiale, ma a contatto con l'interfaccia. Come al solito scriviamo campo MAGNETICO con caratteri maiuscoli per intendere la sovrapposizione del campo di stimolo, ad esempio quello generato da una bobina percorsa da corrente, e del campo di risposta prodotto dal materiale. Ricordiamo che stiamo considerando materiali lineari ed isotropi, quindi \mathbf{B} ed \mathbf{H} hanno lo stesso verso sia all'interno che all'esterno, con $\mathbf{B}_{est} = \mu_0 \mathbf{H}_{est}$ e $\mathbf{B}_{int} = \mu \mu_0 \mathbf{H}_{int}$. Sappiamo che sull'interfaccia si conservano la proiezione normale di \mathbf{B} , perché \mathbf{B} è solenoidale, e la proiezione parallela di \mathbf{H} , perché le correnti di conduzione e di polarizzazione sono distribuite nel volume. Dalla figura 6 vediamo che

$$B_{est} \sin \alpha_{est} = B_{int} \sin \alpha_{int} \quad , \quad H_{est} \cos \alpha_{est} = H_{int} \cos \alpha_{int}$$

Dividendo la prima per la seconda equazione otteniamo

$$\tan \alpha_{est} = \mu \tan \alpha_{int} \quad (8.2)$$

quindi possiamo concludere che le linee di flusso del campo MAGNETICO sono tanto più deflesse all'interfaccia quanto più grande è μ . In particolare **quando μ è grandissimo tutte le linee di flusso del campo MAGNETICO, tranne quelle che incidono quasi normalmente all'esterno, sono quasi parallele all'interfaccia nel materiale.** Ad esempio, per permeabilità magnetica $\mu = 10000$, l'equazione 2) mostra che le linee di flusso incidenti con α_{est} minore di 89.7° hanno α_{int} minore di 1° . Ciò ha una conseguenza molto importante: **quando il campo \mathbf{B}_{est} non è quasi normale all'interfaccia il campo \mathbf{B}_{int} è quasi radente all'interfaccia con intensità molto maggiore di B_{est} .** Infatti la componente parallela di \mathbf{H} si conserva sempre e, nel caso considerato, è quasi uguale ad H_{int} , quindi

$$H_{int} \approx H_{est} \cos \alpha_{est} \implies B_{int} = \mu \mu_0 H_{int} = \mu \mu_0 H_{est} \cos \alpha_{est} = \mu B_{est} \cos \alpha_{est}$$

Ad esempio, per $\mu = 10000$, B_{int} è 5000 volte maggiore di B_{est} quando $\alpha_{est} = 60^\circ$, e rimane 175 volte maggiore di B_{est} anche quando $\alpha_{est} = 89^\circ$.

ESERCIZI

1) Un materiale ideale ha campo coercitivo nullo e permeabilità che passa bruscamente da 1000 all'unità quando $|B|$ supera $0.7 T$. a) Disegnare il

ciclo di isteresi, b) valutare il campo di saturazione, c) individuare l'intervallo dell'asse H entro il quale il materiale si comporta in modo lineare.

2) Sul materiale descritto nell'esercizio 1) il campo MAGNETICO incide con angolo di radenza di 85° e intensità $10^{-4} T$. Calcolare: a) l'angolo di radenza interno, b) H e B nel materiale. c) Verificare che il materiale non è in saturazione.

3) Sull'interfaccia tra il materiale considerato nell'esercizio 1) ed il vuoto il campo MAGNETICO interno ha intensità $0.5 T$ ed angolo di radenza $\alpha_{int} = 60^\circ$. Calcolare α_{est} e B nel vuoto.

4) Una pallina di diametro $1 cm$ ha permeabilità magnetica 10^4 fino a quando il campo MAGNETICO interno non eccede $0.6 T$. La pallina è posta in un campo di stimolo da $0.1 T$ con gradiente di campo di $10^{-3} T/m$. Calcolare: a) i campi MAGNETICI H e B al centro della pallina, b) il momento di dipolo indotto e la forza agente sulla pallina.

8.4 “Legge” di Hopkinson, circuiti magnetici

Consideriamo una ciambella di circonferenza media l costruita con un materiale lineare, omogeneo ed isotropo di permeabilità grande, ad esempio $\mu = 10000$. Pensiamo che la ciambella sia avvolta con N spire percorse da corrente I e domandiamo: quale campo MAGNETICO agisce all'interno? Se l'avvolgimento fosse ben in contatto con il mantello e fosse distribuito

Fig. 8.7

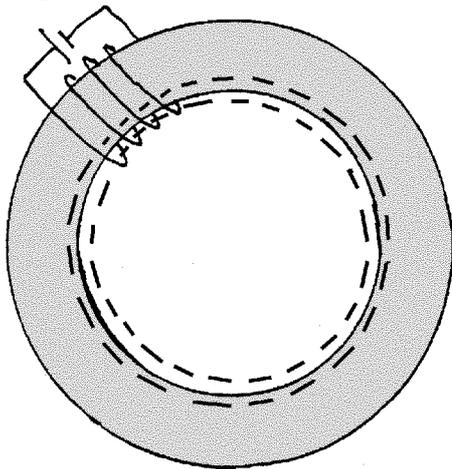
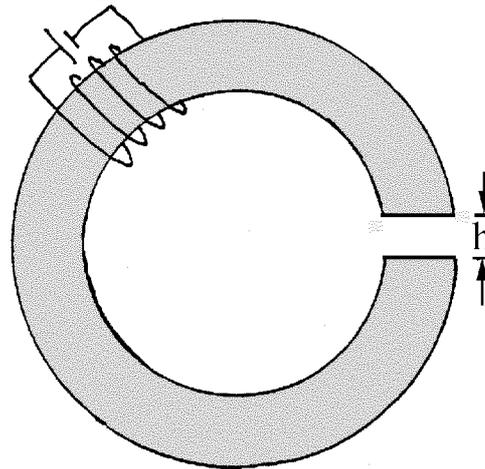


Fig. 8.8



uniformemente su tutta la ciambella, l'equazione 1) consentirebbe di rispondere $B = \mu\mu_0 NI/l$. Quando l'avvolgimento è tutto da una parte e ha spire distanziate dal mantello come in figura 7, la risposta rimane valida, ma il ragionamento necessario per giustificarla richiede un po' di attenzione. Cominciamo a ribadire che la circolazione del campo $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ lungo un percorso concatenato con tutte le spire vale NI , qualunque sia il percorso, comunque sia fatto l'avvolgimento e qualunque sia la permeabilità dei mezzi interposti.

Poi ricordiamo che nel passare dal vuoto al materiale le linee di flusso del campo MAGNETICO diventano quasi parallele all'interfaccia, con la conseguenza che B_{int} diventa molto maggiore di B_{est} . Ciò significa che il flusso di \mathbf{B} attraverso una sezione della ciambella è molto maggiore del flusso di \mathbf{B} uscente dal mantello della ciambella, detto **flusso disperso**. Trascurando il flusso disperso e tenendo presente che \mathbf{B} è solenoidale, dobbiamo ammettere che lo stesso flusso di \mathbf{B} attraversa tutte le sezioni della ciambella. E poiché la ciambella è omogenea e ha sezione uniforme, dobbiamo concludere che B ed H sulla circonferenza media hanno intensità costanti, precisamente

$$H = \frac{NI}{l} \quad , \quad B = \mu\mu_0 \frac{NI}{l} \quad (8.3)$$

Insistiamo nel dire che l'avvolgimento può essere distribuito o concentrato, a contatto o lasco, avere poche spire e grande corrente o tante spire e piccola corrente, per il calcolo dei campi interni alla ciambella ciò che conta è il prodotto NI (in approssimazione di flusso disperso nullo).

Ora, con riferimento alla figura 8, pensiamo che una fettina della ciambella sia stata rimossa; in altre parole pensiamo che il circuito magnetico sia "chiuso" su un sottile gap di spessore h . Indichiamo con l la lunghezza del percorso interno sulla circonferenza media, usiamo l'indice int per i campi entro la ciambella e notiamo che

$$B_{gap} = B_{int} = B \quad , \quad NI = H_{int}l + H_{gap}h$$

La prima equazione vale perché \mathbf{B} è solenoidale con linee di flusso normali alle interfacce che delimitano il gap, la seconda dice che NI è la circolazione di \mathbf{H} lungo un percorso concatenato con tutte le spire. Sostituendo H_{int} con $B/\mu\mu_0$ e H_{gap} con B/μ_0 otteniamo

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu h}$$

Ciò mostra che l'apertura del gap può far diminuire moltissimo B , anche quando h è molto piccolo rispetto ad l . Ad esempio B si riduce di un fattore 100 quando asportiamo una fettina di spessore 1 *cm* in una ciambella di circonferenza 1 *m* e permeabilità 10000.

Per studiare circuiti magnetici con rami in serie e in parallelo, come quelli schematizzati nelle figure 9 e 10, conviene introdurre un linguaggio analogo a quello usato per i circuiti elettrici. Il ruolo della corrente viene preso dal flusso di \mathbf{B} e la prima legge di Kirchhof viene sostituita con la regola: **la somma algebrica dei flussi di \mathbf{B} entranti in un nodo circuitale è nulla**, valida in approssimazione di flusso disperso nullo. Il ruolo della tensione V ai capi di un ramo del circuito viene preso dalla **tensione magnetica** V_m , definita come integrale di percorso di \mathbf{H} , proprio come V è l'integrale di percorso di \mathbf{E} . Il ruolo della forza elettromotrice viene preso dalla **forza**

Fig. 8.9

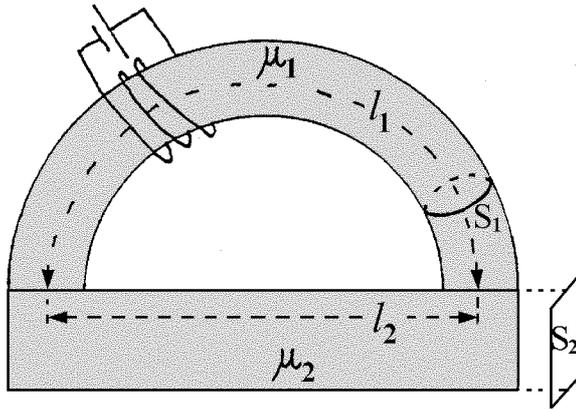
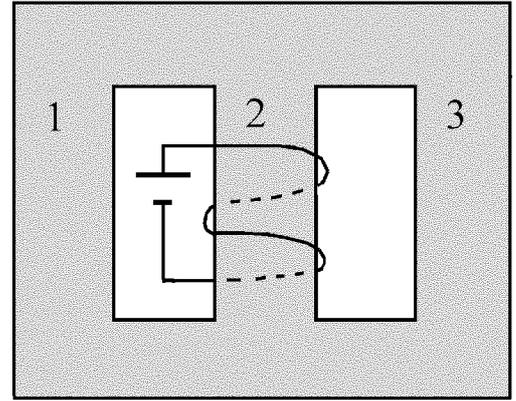


Fig. 8.10



magnetomotrice NI e la seconda regola di Kirchhoff viene sostituita con: **la somma algebrica delle tensioni magnetiche nei lati di una maglia circuitale è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia.** Infine il ruolo della legge di Ohm viene preso dalla

$$\text{legge di Hopkinson} \quad V_m = \mathcal{R}\Phi \quad (8.4)$$

che lega la tensione magnetica ai capi di un ramo al flusso Φ del campo \mathbf{B} nel ramo; la grandezza \mathcal{R} prende il nome di **riluttanza**. Per un ramo di sezione S uniforme, lunghezza l e permeabilità μ , possiamo scrivere

$$V_m = Hl = \frac{Bl}{\mu_0\mu} = \frac{l}{\mu_0\mu S}\Phi$$

quindi la riluttanza del ramo vale

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0\mu S} \quad (8.5)$$

Nel caso considerato in figura 9, lo stesso flusso Φ percorre i due rami e possiamo determinarlo osservando che $NI = V_{m1} + V_{m2} = [\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2]\Phi$. Dunque **due rami in serie sono equivalenti ad un unico ramo con riluttanza uguale alla somma delle riluttanze dei due rami.**

Nel caso considerato in figura 10 il flusso Φ_2 attraverso il ramo centrale si ripartisce tra i rami esterni, quindi $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$. Indicata con $V_{m1} = V_{m3}$ la tensione magnetica ai capi dei due rami esterni si vede che

$$\Phi_1 = \frac{V_{m1}}{\mathcal{R}_1} \quad , \quad \Phi_3 = \frac{V_{m1}}{\mathcal{R}_3} \quad , \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = V_{m1} \left[\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \right]$$

Quindi possiamo calcolare la riluttanza equivalente ai due rami esterni con la regola: **due rami in parallelo equivalgono ad un unico ramo con riluttanza uguale all'inverso della somma dagli inversi delle due riluttanze.** Calcolata la riluttanza \mathcal{R}_{13} equivalente ai due rami in parallelo basta tenere presente che $NI = \Phi_2(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{13})$ per calcolare Φ_2 .

Lasciamo agli esercizi l'analisi di alcune configurazioni tipiche degli elettromagneti e passiamo a descrivere un metodo sperimentale che consente di

Fig. 8.11

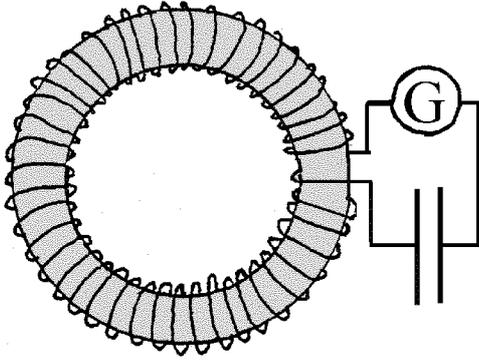
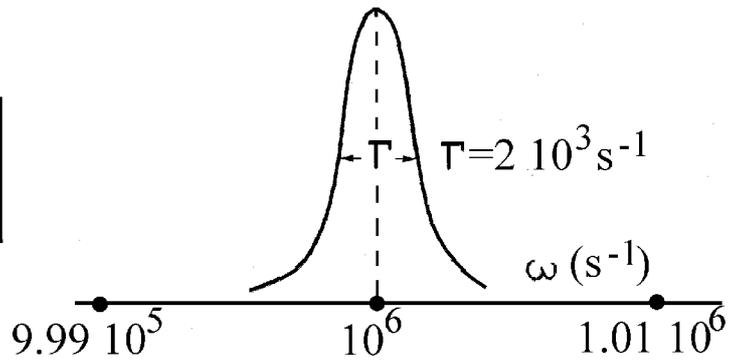


Fig. 8.12



misurare l'induttanza L e la resistenza R di un induttore. Per dare concretezza al discorso, pensiamo all'induttore schematizzato in figura 11: un anello costituito da un materiale lineare di permeabilità statica $\mu = 2000$ e conducibilità elettrica trascurabile, con sezione trasversa di diametro $d_{nucleo} = 6 \text{ mm}$, circonferenza media $l = 9 \text{ cm}$, avvolto da $N = 50$ spire di rame di diametro $d_{filo} = 1 \text{ mm}$. Se tale induttore fosse alimentato con tensione dipendente dal tempo molto lentamente avrebbe induttanza e resistenza date da

$$L_0 = \mu\mu_0 \frac{N^2 \pi (d_{nucleo}/2)^2}{l} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad , \quad R_0 = \frac{1}{g} \frac{N \pi (d_{nucleo} + d_{filo})}{\pi (d_{filo}/2)^2} \approx 0.024 \Omega$$

Ora pensiamo di aver inserito l'induttore in serie ad un condensatore di capacità ben calibrata, di aver alimentato il circuito con un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t)$, con \mathcal{E} indipendente dalla frequenza, e di aver misurato la curva di risonanza del circuito. Ad esempio pensiamo che con condensatore di capacità $C = 2 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ la curva di risonanza abbia picco alla frequenza $\omega_0 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ e larghezza $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, come mostrato in figura 12. Ricordando che nel circuito RCL in serie la frequenza di risonanza e la larghezza di risonanza valgono $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e $\Gamma = R/L$, si vede che $L = 1/\omega_0^2 C = 5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$ e $R = 1 \Omega$ hanno valori ben diversi da quelli quasi statici. E se ripetessimo le misure con un condensatore di capacità diversa otterremmo valori ancora diversi. Ciò è dovuto alle seguenti ragioni.

- La permeabilità magnetica dei materiali conserva il valore statico solo a bassissime frequenze, poi prende a diminuire all'aumentare della frequenza; a frequenze maggiori di qualche MHz conserva valori ben maggiori dell'unità solo in materiali come le ferriti. Il fatto che l'induttanza misurata risulti quattro volte minore di quella quasi statica dice che alla frequenza $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ la permeabilità del nucleo è 500 e non 2000. Lo studio sperimentale della permeabilità $\mu(\omega)$ dei materiali a frequenze elettrotecniche e radiotecniche è basato proprio sul metodo descritto: le curve di risonanza misurate per vari valori della capacità inserita nel circuito conducono a

$$\mu(\omega) = \frac{lL(\omega)}{\mu_0 N^2 S}$$

- La resistenza R dell'avvolgimento dipende dalla frequenza per due ragioni che esporremo in dettaglio nei prossimi capitoli: l'effetto pelle e l'emissione di radiazione elettromagnetica. Il primo è dovuto al fatto che la corrente alternata si distribuisce in uno strato di pelle del conduttore tanto più sottile quanto più grande è ω . Il secondo insorge perché le correnti di alta frequenza, oltre a dissipare energia per effetto Joule nello strato di pelle, emettono energia nello spazio. Per queste ragioni la resistenza dell'induttore ottenuta dalla curva di risonanza in figura 12 risulta più di 40 volte maggiore della resistenza in continua.

Infine diciamo che il metodo di misura esposto viene usato anche per misure di capacità. A tale scopo basta porre un induttore vuoto e ben calibrato in serie al condensatore di capacità incognita, alimentare il circuito con un generatore che fornisca forza elettromotrice di picco indipendente dalla frequenza e far variare la frequenza sino a raggiungere la piena risonanza.

ESERCIZI

1) Una ciambella di un materiale magnetico lineare ha sezione $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, circonferenza media 1 m ed è avvolta con 10 spire di filo di rame percorse dalla corrente di 5 A . Nella ciambella il campo B ha valor medio di 0.5 T . Calcolare: a) la permeabilità magnetica del materiale, b) l'energia magnetica immagazzinata nella ciambella. Poi pensare che una fetta di ciambella di spessore 1 cm venga asportata mantenendo invariata la corrente e calcolare: c) i campi B ed H nel materiale, d) l'energia magnetica nel gap.

2) Un anello toroidale di sezione 2 cm^2 e circonferenza media 110 cm , è avvolto con 1000 spire di filo di rame di diametro 1 mm . Nel caso che l'anello sia vuoto calcolare: a) l'induttanza del sistema, b) la corrente quando l'avvolgimento viene alimentato con forza elettromotrice armonica di frequenza 50 Hz e valore di picco di 310 V (valori della rete elettrica in Europa), c) la potenza dissipata in tali condizioni. Poi pensare che l'anello sia costituito da un materiale magnetico di permeabilità 1000 alla frequenza di rete e rispondere nuovamente alle domande a), b) e c).

Fig. 8.13

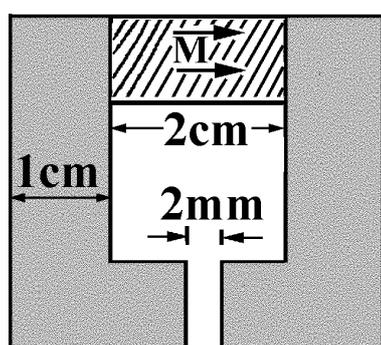
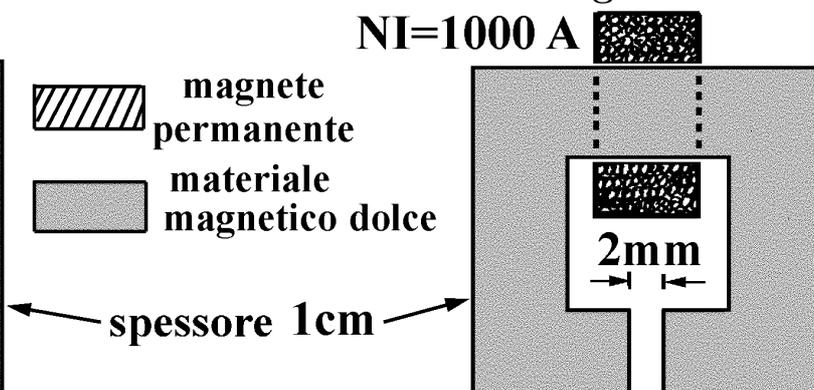


Fig. 8.14



3) Una barra cilindrica permanentemente magnetizzata con $M = 10^6\text{ A/m}$ viene inserita nella struttura mostrata in figura 13, costruita con un materiale

magnetico lineare di permeabilità 10000. La sezione del circuito magnetico è quadrata con lato di 1 cm. a) Disegnare le linee di flusso di \mathbf{H} e \mathbf{B} nel magnete, nel materiale lineare e nel gap. b) Calcolare H e B nel magnete, nel materiale lineare e nel gap.

4) L'elettromagnete in figura 14 differisca dal sistema in figura 13 solo per la sostituzione del magnete con una barra di uguali dimensioni e permeabilità 10000, avvolta da una bobina di forza magnetomotrice 1000 A. a) Disegnare le linee di flusso di \mathbf{H} e \mathbf{B} nel materiale lineare e nel gap. b) Calcolare H e B nel materiale lineare e nel gap.

5) Nel circuito magnetico considerato in figura 10 il ramo centrale ha riluttanza $10^4 A/Wb$ ed è avvolto con 100 spire percorse dalla corrente di 10A. I due rami laterali hanno riluttanze uguali, pari a $2 \cdot 10^4 A/Wb$. Calcolare i flussi di \mathbf{B} nei tre rami.

6) Nel circuito considerato in figura 11 l'induttore è vuoto e ha induttanza $L = 2 \cdot 10^{-7} H$ ben calibrata. La curva di risonanza del circuito ha picco alla frequenza $\nu = 1 Mhz$ e ha larghezza $\Gamma = 10^5 s^{-1}$. Calcolare: a) la capacità del condensatore, b) la potenza dissipata in condizioni di piena risonanza.

7) Un cilindro di permeabilità 2000, diametro interno 3 cm e lunghezza 5 cm è avvolto da 250 spire di filo di rame. Valutare approssimativamente l'induttanza del sistema.

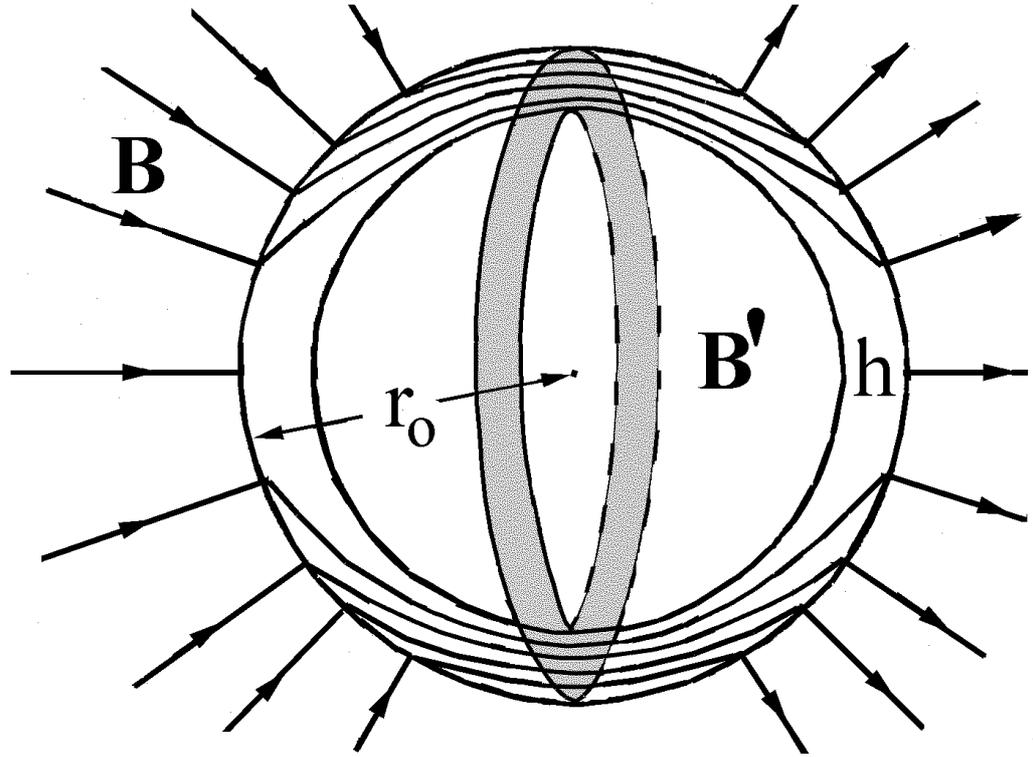
8.5 Schermaggio magnetico

Nel paragrafo 4.12 abbiamo visto che una sfera di altissima permeabilità magnetica risponde al campo di stimolo \mathbf{B}_S con correnti che rendono il campo MAGNETICO \mathbf{B} interno tre volte maggiore di \mathbf{B}_S , come illustrato in figura 4.27. Quindi il flusso di \mathbf{B} attraverso una sfera di raggio r_0 stimolata dal campo \mathbf{B}_S vale $3\pi r_0^2 B_S$. Si noti anche che in prossimità del punto esterno 1 e dei punti equivalenti il campo MAGNETICO ha intensità molto minore di B_S , infatti la proiezione di \mathbf{H} sull'interfaccia materiale-vuoto si conserva nell'attraversare l'interfaccia, quindi

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{3B_S}{\mu\mu_0} = \frac{3B_S}{\mu}$$

Ora consideriamo il guscio sferico in figura 15. Ha raggio esterno uguale a quello della sfera, è costituito dallo stesso materiale, ad esempio mumetal, e ha spessore h . A prima vista può sorprendere che un tale guscio schermi efficacemente la regione interna dal campo magnetico di stimolo, ma è davvero così. Per descrivere il meccanismo di schermo cominciamo a notare che il flusso di \mathbf{B} raccolto dal guscio è quasi esattamente uguale a quello raccolto dalla sfera. Infatti basta che l'incidenza del campo MAGNETICO sul

Fig. 8.15



guscio diventi impercettibilmente meno normale che sulla sfera per intrappolare il campo \mathbf{B} nello spessore del guscio, come mostrato in figura 15. Di conseguenza il campo MAGNETICO \mathbf{B} sull'anello ombreggiato ha intensità

$$B_{anello} = \frac{3\pi r_0^2 B_S}{2\pi r_0 h} = B_S \frac{3r_0}{2h}$$

Naturalmente B_{anello} non può eccedere il campo di saturazione $\mu_0 M_{sat}$, quindi dobbiamo precisare che il risultato

$$B_{anello} = B_S \frac{3r_0}{2h} \quad \text{vale solo per} \quad h > \frac{3r_0 B_S}{2\mu_0 M_{sat}}$$

AmMESSO che questa condizione sia soddisfatta possiamo calcolare il campo interno al guscio ricordando che la proiezione di \mathbf{H} sull'interfaccia materiale vuoto si conserva nell'attraversare l'interfaccia. Quindi il campo \mathbf{B}' in prossimità dell'anello ombreggiato, all'interno o all'esterno del guscio, ha intensità $B' = \mu_0 H_{anello} = B_{anello}/\mu$. In realtà il campo MAGNETICO è uniforme in tutta la regione interna al guscio e ha intensità

$$B' = \frac{3r_0}{2\mu h} B_S \quad \text{quando} \quad h \geq \frac{3r_0 B_S}{2\mu_0 M_{sat}} \quad (8.6)$$

Insomma il campo \mathbf{B} viene schermato dal guscio tanto più efficacemente quanto più grande è lo spessore. Ad esempio, entro una sfera di raggio 1 m, racchiusa da un guscio di mumetal ($\mu = 70000$, $\mu_0 M_{sat} = 0.7 \text{ T}$) di spessore 2 mm, il campo MAGNETICO è circa cento volte minore di quello di stimolo, almeno fino a quando B_S rimane minore di 10^{-3} T .

ESERCIZI

1) Un guscio sferico di diametro esterno $2m$ ha permeabilità magnetica 10^4 fino a quando il campo MAGNETICO entro il guscio non eccede $0.5 T$. Il guscio viene usato per schermare il campo magnetico terrestre. Calcolare: a) lo spessore minimo del guscio necessario a garantire che il materiale si comporti in modo lineare, b) il fattore di schermaggio, definito come rapporto tra il campo di stimolo ed il campo MAGNETICO nel vuoto interno, in funzione dello spessore del guscio. c) Poi pensare che un secondo guscio dello stesso materiale venga posto all'interno del primo e valutare il fattore di schermaggio complessivo con gusci non saturati.

8.6 Dissipazione nel ciclo di isteresi

Un pezzo di materiale ferromagnetico costretto a seguire cicli di isteresi si scalda, sia perché viene percorso da correnti di conduzione di Foucault provocate dal campo ELETTRICO indotto, sia perché il suo comportamento magnetico non è mai perfettamente lineare. In questo paragrafo ammettiamo che la conducibilità elettrica del materiale sia nulla, in modo da escludere che insorgano correnti parassite, e concentriamo l'attenzione sulla dissipazione dovuta alla non perfetta linearità del materiale magnetico. Posto $w = 0$ nell'equazione di Poynting 7.7), rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) \quad (8.7)$$

che, a prima vista, sembra una legge di conservazione dell'energia elettromagnetica. Ma non lo è: quando il materiale non è lineare il primo membro non è la derivata rispetto al tempo della densità di energia elettromagnetica. Per capire questo punto integriamo ambo i membri dell'equazione 7) sul volume \mathcal{V} di una ciambella di un materiale omogeneo non conduttore. Per il teorema della divergenza l'integrale di $\nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r})$ diventa

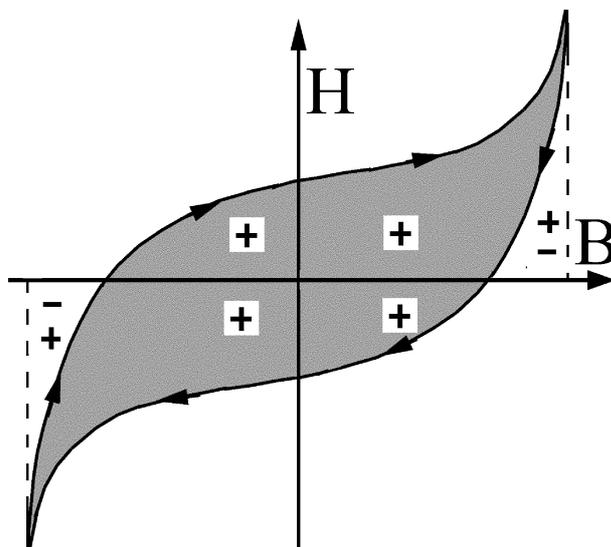
$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \nabla \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \oint_{\text{mantello}} d\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = -W(t)$$

dove $W(t)$ è la potenza **entrante** nella ciambella attraverso il mantello. Quindi rimaniamo alle prese con l'equazione

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left[\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right] = W(t) \quad (8.7')$$

Ora pensiamo che la ciambella percorra il ciclo di isteresi in figura 16, ad esempio partendo da condizioni di saturazione con H negativo. Indichiamo con T il periodo del ciclo, pensando che sia lunghissimo, in modo da poter ammettere che, ad ogni istante, tutte le fettine della ciambella siano nello

Fig. 8.16



stesso stato elettrico e magnetico. Ciò consente di sostituire l'equazione 7') con l'equazione

$$\nu \left[E(t) \frac{dD(t)}{dt} + H(t) \frac{dB(t)}{dt} \right] = W(t) \quad (8.7'')$$

dove $E(t)$, $D(t)$, $B(t)$ ed $H(t)$ sono valutati al centro di una fettina. Integrando ambo i membri dell'equazione 7'') sul periodo del ciclo, otteniamo

$$\nu \int_0^T [E(t)dD(t) + H(t)dB(t)] = \int_0^T W(t)dt = U \quad (8.8)$$

dove U è l'energia entrata nella ciambella durante l'intero ciclo di isteresi. Nell'equazione 8) l'integrale sul periodo del termine elettrico è nullo perché la relazione tra D ed E è esente da isteresi, mentre l'integrale sul periodo del termine magnetico è null'altro che l'area del ciclo di isteresi. Quindi possiamo concludere che

$$\nu \oint H(B) dB = U \quad (8.9)$$

In parole: **l'energia che entra nella ciambella durante un ciclo di isteresi è il prodotto del volume della ciambella per l'area del ciclo di isteresi.** E poiché lo stato elettromagnetico finale della ciambella è uguale a quello iniziale, l'energia U viene dissipata nella ciambella.

ESERCIZI

1) Una ciambella di volume 1 dm^3 descrive cicli di isteresi di area 100 J/m^3 con frequenza $\nu = 50 \text{ Hz}$. Calcolare la potenza dissipata.

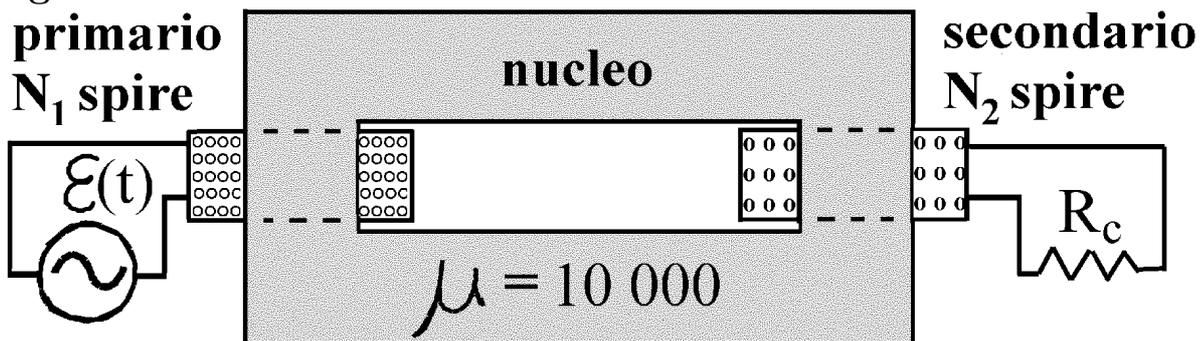
2) L'avvolgimento di una ciambella viene alimentato con frequenza ciclica ν e corrente di picco tale da portare la ciambella in saturazione. Mostrare che la potenza dissipata vale $W = \nu \nu \oint H(B) dB$.

8.7 Trasformatore di tensione

Concludiamo il capitolo descrivendo il principio di funzionamento del trasformatore di tensione schematizzato in figura 17. Oltre ad essere importante nella tecnologia elettromagnetica, il trasformatore ha una notevole importanza concettuale. È un sistema che preleva energia da un generatore di forza elettromotrice e la invia ad un utilizzatore, avvalendosi dell'opera di un trasportatore di energia molto efficiente: il campo elettromagnetico.

Il **nucleo del trasformatore** è un circuito magnetico chiuso di sezione trasversa S , costruito con un materiale magnetico dolce, scelto con cura. Il materiale deve avere comportamento magnetico (quasi) perfettamente lineare, in modo da ridurre al minimo la dissipazione magnetica, e deve avere conducibilità elettrica (quasi) nulla, oppure deve essere costruito con pacchi di sottili lamierini isolati elettricamente l'uno dall'altro ed orientati parallelamente all'asse del circuito magnetico, in modo da ridurre (quasi) a zero le correnti di Foucault e la conseguente dissipazione Joule. Il nucleo è avvolto da due avvolgimenti detti **primario** e **secondario**. Il primario è costituito da N_1 spire con resistenza (quasi) nulla e viene alimentato da un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$ e resistenza interna (quasi) nulla. Il secondario, composto da N_2 spire con resistenza (quasi) nulla, produce la forza elettromotrice richiesta dai circuiti utilizzatori. La permeabilità magnetica del nucleo deve essere grande, in modo da rendere (quasi) nullo il flusso disperso, ma non è necessario che sia grandissima. Ad esempio le ferriti, che hanno μ dell'ordine di alcune migliaia, ottima linearità e bassissima conducibilità, sono materiali molto adatti per i nuclei dei trasformatori.

Fig. 8.17



Nel seguito, pensiamo che tutti i (quasi) che abbiamo distribuito nel discorso siano rimossi, riservandoci di aggiungere un commento finale sui trasformatori concreti, e pensiamo che il secondario sia chiuso su una resistenza di carico R_c , riservandoci di far tendere R_c all'infinito per studiare la situazione con secondario aperto. Anzitutto notiamo che il nucleo è percorso da un flusso magnetico $\Phi(t)$ legato alle correnti che circolano nei due avvolgimenti dalla legge di Hopkinson

$$N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) = \mathcal{R} \Phi(t) \quad (8.10)$$

dove $\mathcal{R} = l/(\mu\mu_0S)$ è la riluttanza del circuito magnetico. Attenzione! **Abbiamo indicato con $\Phi(t)$ il flusso magnetico nel nucleo, non i flussi concatenati con i due avvolgimenti, questi sono $N_1\Phi(t)$ ed $N_2\Phi(t)$ rispettivamente.** Il circuito primario ha resistenza nulla, quindi la forza elettromotrice applicata $\mathcal{E}(t)$ deve essere opposta alla forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}_1(t)$, e possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_1(t) = N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.11)$$

Nel secondario chiuso sulla resistenza R_c agisce solo la forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}_2(t)$, quindi possiamo scrivere

$$R_c I_2(t) = \mathcal{E}_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.12)$$

Da queste equazioni e dall'equazione 11) otteniamo immediatamente

$$\mathcal{E}_2(t) = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}(t) \quad (8.13)$$

$$I_2(t) = -\frac{N_2}{N_1 R_c} \mathcal{E}(t) \quad (8.14)$$

L'equazione 13) afferma che **la forza elettromotrice indotta nel secondario è uguale al prodotto del fattore di moltiplicazione $-N_2/N_1$ per la forza elettromotrice applicata al primario.** Apparentemente questa conclusione non dipende dalla riluttanza del circuito magnetico, infatti non abbiamo dovuto usare l'equazione 10) per ottenerla. Ma non si dimentichi che l'ipotesi che ogni spira del primario o del secondario sia attraversata dallo stesso flusso Φ è valida solo in approssimazione di flusso disperso nullo, dunque la permeabilità deve essere grande. Se non lo fosse sarebbe conveniente distribuire uniformemente i due avvolgimenti su tutta la lunghezza del circuito magnetico, compenetrandoli il più possibile l'uno nell'altro.

Per calcolare la corrente primaria e per mettere ben in luce il meccanismo di trasferimento d'energia senza immergerci in calcoli laboriosi, restringiamo l'attenzione al caso che il primario sia alimentato con forza elettromotrice armonica. In tal caso, poiché tutti i componenti sono lineari, anche le correnti ed il flusso $\Phi(t)$ sono armonici, quindi possiamo scrivere $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}e^{-i\omega t}$, $I_1(t) = I_1e^{-i\omega t}$, $I_2(t) = I_2e^{-i\omega t}$ e $\Phi(t) = \Phi e^{-i\omega t}$, intendendo che \mathcal{E} sia reale, ma lasciando I_1 , I_2 e Φ libere di essere complesse, ovvero sfasate rispetto ad \mathcal{E} . Sostituendo nelle equazioni 11), 10) e 14) rimaniamo alle prese con le relazioni algebriche

$$\mathcal{E} = -i\omega N_1 \Phi \quad , \quad N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R} \Phi \quad , \quad I_2 = -\frac{N_2}{N_1 R_c} \mathcal{E}$$

Sostituendo la prima e la terza equazione nella seconda otteniamo

$$N_1 I_1 - \frac{N_2^2}{N_1 R_c} \mathcal{E} = i \frac{\mathcal{R}}{\omega N_1} \mathcal{E} \implies I_1 = i \frac{\mathcal{R} \mathcal{E}}{\omega N_1^2} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c} \mathcal{E}$$

Ma $N_1^2/\mathcal{R} = L_1$ è il coefficiente di autoinduzione del primario, quindi possiamo concludere che

$$I_1 = i \frac{\mathcal{E}}{\omega L_1} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c} \mathcal{E} \quad (8.15)$$

Questa equazione mostra che la corrente primaria ha una parte in quadratura con la forza elettromotrice, uguale alla corrente che sarebbe presente anche se il secondario non ci fosse o fosse aperto ($R_c = \infty$). Questa parte comporta trasferimenti alternati di potenza dal generatore al campo elettromagnetico con valor medio temporale nullo. Ma la corrente primaria ha anche una parte in fase con la forza elettromotrice applicata, quindi il circuito primario assorbe la potenza

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{E} \Re\{I_1\} = \frac{\mathcal{E}^2}{2R_c} \frac{N_2^2}{N_1^2} \quad (8.16)$$

Tenendo conto dell'equazione 14) si vede che la potenza assorbita dal primario risulta proprio uguale alla potenza $R_c I_2^2/2$ dissipata nella resistenza di carico! Dunque quanto detto all'inizio è vero: **la potenza fluisce dal generatore al primario, che la trasferisce al campo elettromagnetico, che la trasferisce al secondario, che la trasferisce alla resistenza di carico, che la dissipa.** Dall'equazione 15) vediamo anche che l'impedenza $Z = \mathcal{E}/I_1$ del circuito primario è tale che

$$\frac{1}{Z} = i \frac{1}{\omega L_1} + \frac{N_2^2}{N_1^2 R_c}$$

Dunque, **l'impedenza del circuito primario dipende dalla resistenza di carico del secondario** e diventa puramente induttiva solo quando R_c tende all'infinito, ovvero quando il secondario è aperto.

Nel caso ideale che abbiamo considerato il rendimento del trasformatore risulta unitario: tutta la potenza ceduta dal generatore raggiunge il carico. Naturalmente il rendimento energetico di un trasformatore reale è limitato dalla dissipazione Joule e magnetica nel nucleo, dalla dissipazione Joule negli avvolgimenti primario e secondario e dalla dispersione di flusso, tutti effetti che abbiamo trascurato. Ma per non lasciare l'impressione che il sistema studiato sia lontano dalla realtà diciamo che il rendimento dei trasformatori moderni può raggiungere valori quasi unitari, anche maggiori di 0.99.

ESERCIZI

1) Un trasformatore ideale fornisce ad una resistenza collegata al secondario la potenza efficace di 500 W con tensione di picco di 36 V . Il primario è alimentato con tensione di rete (220 V efficaci a 50 Hz). a) Quale corrente assorbe il primario? b) Quale flusso di energia percorre il nucleo?