13 Novembre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \tan(x^3+2x)}{x\,(1-\cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \tan(x^3+2x)}{x\,(1-\cos x)\,(1+\cos x)} =$$

Ricordiamoci $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad \lim_{x\to 0} (1+\cos x) = 2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-\tan(x^3+2x)}{x \;\cancel{\frac{x^2}{2}}\;\cancel{2}}$$

$$\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x} \to 1 \qquad \frac{2}{1+\cos x} \to 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-\tan(x^3+2x)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - \left(1+\tan^2(x^3+2x)\right)(3x^2+2)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos(2x)-2) - 3x^2 - 2\tan^2(x^3+2x) - 3x^2\tan^2(x^3+2x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\,\frac{\cos(2x)-1}{x^2} - 1 - \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x^3+2x)}{x^2}$$

$$- \underbrace{\lim_{x\to 0} \tan^2(x^3+2x)}_{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2^3}{3}\,\underbrace{\frac{\cos(2x)-1}{(2x)^2}}_{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\tan^2(x^3+2x)}{(x^3+2x)^2}}_{1}\,\frac{(x^3+2x)^2}{x^2}$$

$$= -\frac{4}{3} - 1 - \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^6+4x^4+4x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{15}{3} = -5$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = 1 \Leftarrow$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin y}{y}}{\cos(y)} = 1$$

Formule per il resto

Teorema (Formula di Peano) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $n\geq 1$

f derivabile fino all'ordine $(n-1)$ in (a,b), esiste $f^{(n)}(x_0)$.

Allora se consideriamo

$$P_{n,x_0}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

si ha $f(x)=P_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0}(x)$

con $R_{n,x_0}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ cioè

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

Dim

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$\frac{f(x_0)-\underbrace{P_{n,x_0}(x_0)}_{f(x_0)}}{0}\quad 0$$

Se $n=1$ per la 1° regola dell'Hopital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{1,x_0}(x)}{x-x_0}=\frac{f'(x_0)-\overbrace{P'_{1,x_0}(x_0)}^{f'(x_0)}}{1}=0$$

Se $n>1$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P'_{n,x_0}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\dots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}_{n,x_0}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$\overbrace{\frac{f^{(n-1)}(x_0)-\overbrace{P^{(n-1)}_{n,x_0}(x_0)}^{f^{(n-1)}(x_0)}}{0}}^{0}$$

$$\overset{1^\circ\text{ regola H}}{=}\frac{f^{(n)}(x_0)-P^{(n)}_{n,x_0}(x_0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

Corollario Sia $p(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ t.c.

$p(x) = o((x-x_0)^n)$ in corrispondenza di prefissato punto x_0. Allora $p \equiv 0$

Dim Sappiamo che

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

Sono infatti entrambi polinomi di grado $\leq n$ con eguali derivate di ordine $\leq n$ nel punto x_0.
Abbiamo visto ieri che c'è un unico polinomio con queste proprietà.

Se $p(x)$ non fosse il polinomio nullo esisterebbero degli $j \leq n$ t.c. $p^{(j)}(x_0) \neq 0$. Scegliamo il più piccolo di questi j e chiamiamolo j_0. Allora

$$p(x) = \frac{p^{(j_0)}(x_0)}{j_0!}(x-x_0)^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

con $p^{(j_0)}(x_0) \neq 0$

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^{j_0}}{(x-x_0)^n}\left[\frac{p^{(j_0)}(x_0)}{j_0!} + \underbrace{\sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^{j-j_0}}_{\to 0}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{p^{(j_0)}(x_0)}{j_0!}}_{\neq 0} \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{\overbrace{j_0-n}^{\leq 0}} = 0$$

Assurdo

perché se $j_0 = n$ il limite è $\dfrac{p^{(j_0)}(x_0)}{j_0!} \neq 0$

Se invece $j_0 < n$ il limite o non esiste (e quindi non si può avere limite $= 0$) oppure $= \pm\infty$
(indipendentemente dal segno, diverso da 0)

Corollario Sia f con definita in (a,b), $x_0 \in (a,b)$, esistono le mime $(n-1)$ derivate in (a,b), esiste $f^{(n)}(x_0)$.
Allora, se $p(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$ t.c.

$$f(x) = p(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

allora $p(x)$ è il polinomio di Taylor $P_{n,x_0}(x)$

Dim Abbiamo

$$f(x) = p(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$0 = p(x) - P_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$P_{n,x_0} - p(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

Siccome $\deg\left(P_{n,x_0} - P\right) \leq n$

Allora il lemma garantisce che $P_{n,x_0} - P \equiv 0$

$$\iff P_{n\,x_0} = P$$

Esempi Trovare tutti i polinomi di McLaurin

di $f(x) = x^2 \sin(x^3)$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

$$\sin(y) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(y^{2n+1})$$

$$\sin(x^3) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+3}}{(2j+1)!} + o(x^{6n+3})$$

$$f(x) = x^2 \sin(x^3) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!} + \overbrace{x^2 o(x^{6n+3})}^{o(x^{6n+5})}$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!} + o(x^{6n+5})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\, o(x^{6n+3})}{x^{6n+5}} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^{6n+3})}{x^{6n+3}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 o(x^{6n+3}) = o(x^{6n+5})$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!}}_{\deg(\;) = 6n+5} + o(x^{6n+5})$$

$= P_{6n+5}(x)$

$P_0 = ?$ $P_1 = ?$ $P_2 ?$, $P_3 ?$ $P_4 ?$

Per $n=0$

$$f(x) = x^5 + o(x^5) = o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$$

$$f(x) = o(x^4) = 0 + o(x^4) \Rightarrow P_4 = 0 \Rightarrow P_0 = P_1 = P_2 = P_3$$

sono nulli

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!}} + o(x^{6n+5})$$

P_{6n+5} . . . . P_m . . . P_{6n+11}

P_m $6n+5 < m < 6n+11$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!} + o(x^{6n+11})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{6j+5}}{(2j+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{6n+11}}{(2n+3)!} + o(x^{6n+11})$$

$$f(x) = P_{6n+5}(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^{6n+11}}{(2n+3)!} + o(x^{6n+11})$$

se $6n+5 < m < 6n+11$

$$f(x) = P_{6n+5}(x) + o(x^m)$$

$$\deg P_{6n+5} = 6n+5 < m$$

$$\Rightarrow P_m(x) = P_{6n+5}(x)$$