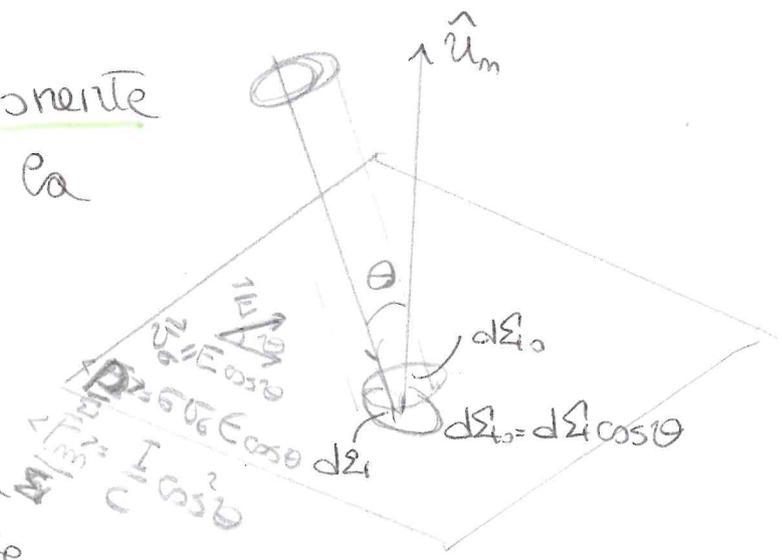


Infine consideriamo un'onda piana che incida con un angolo  $\theta$  rispetto alla superficie.

In questo caso la componente dell'onda che fornisce la variazione di  $q.d.m$  è quella normale alla superficie (che comporta un fattore  $\cos\theta$ ), inoltre



è area coperta dall'onda, a parità di sezione d'onda incidente, è maggiore di  $\cos\theta$ .

Si ha quindi in definitiva:

$$P_{rad} = \frac{I}{c} \cos^2 \theta \quad \text{se Assorbimento Completo}$$

$$P_{rad} = 2 \frac{I}{c} \cos^2 \theta \quad \text{se Riflessione Completa}$$

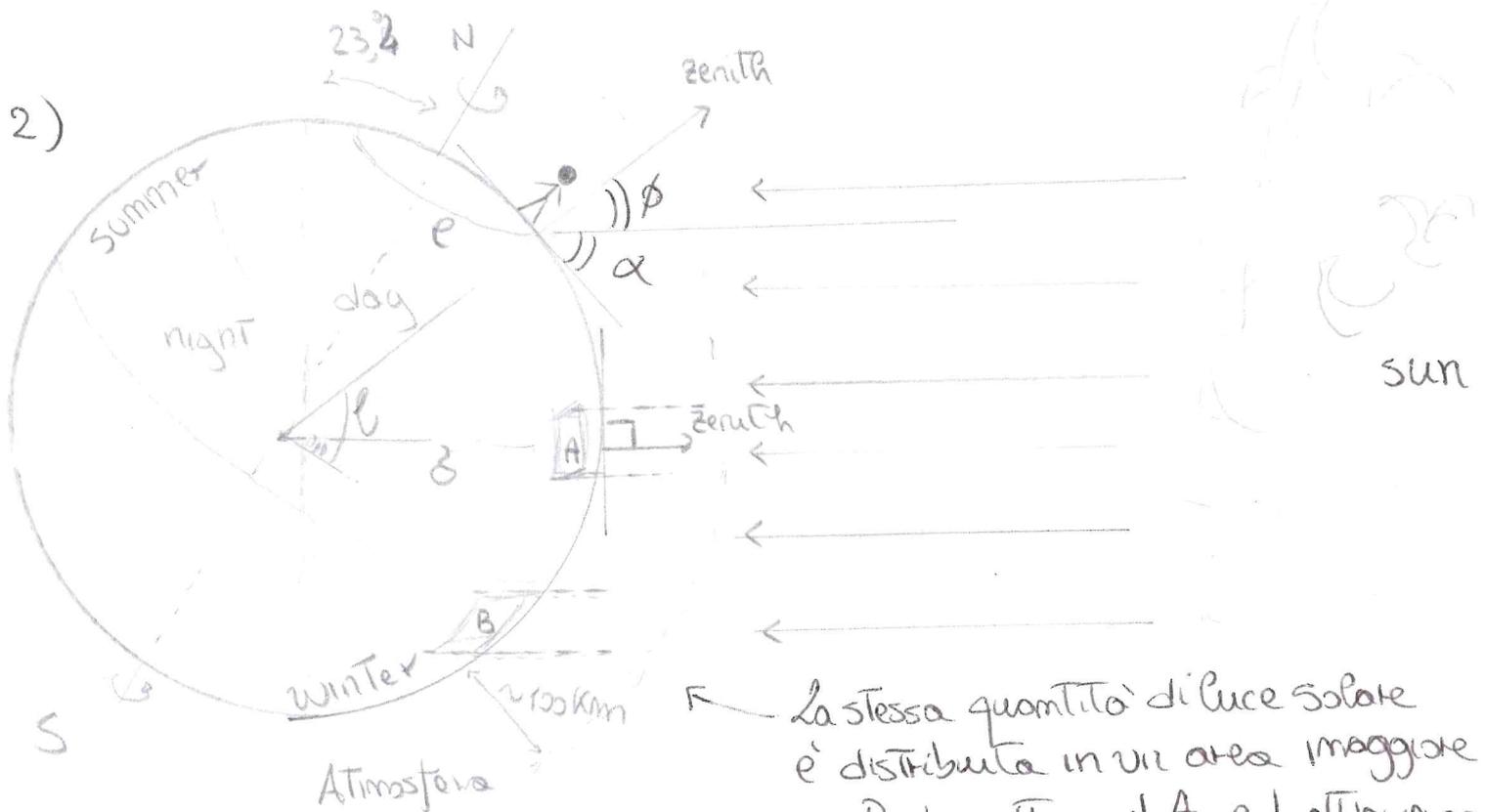
L'intensità di radiazione è:  
 $I = I_0 \cos \theta$  (Legge di Lambert)

Asse Terrestre inclinato  $23.5^\circ$   
 (e latitudinale) della T

Questo spiega la variazione stagionale, il flusso di radiazione che copre la superficie terrestre dipende dall'inclinazione con cui i raggi solari la raggiungono. Queste relazioni ci dicono anche come orientare in modo ottimale i pannelli solari.

→ le T<sub>ET</sub> di 23,4 dell'asse terrestre rispetto all'eclittica incide in 3 modi sulla quantità di radiazione ricevuta da una particolare località:

- 1 - durata del giorno
- 2 - Angolo di incidenza della radiazione solare
- 3 - Spessore dello strato d'atmosfera attraversato dai raggi (vedi dopo "finestra Atmosferica")



La stessa quantità di luce solare è distribuita in un'area maggiore in B rispetto ad A, ed attraversa spessori diversi di atmosfera  
 Solar Zenith Angle (posizione apparente del sole a mezzogiorno)

Angolo incidenza:  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$

$\phi, e, \delta$

$$= \frac{\pi}{2} - e + \delta$$

↓  
latitude

$$\delta = 23,45 \sin\left(360 \frac{284+m}{365}\right) \leftarrow \text{giorno}$$

declinazione solare, ovvero la latitudine dei luoghi in cui, in un dato giorno, il sole è allo zenith a mezzogiorno (e.g. 21 giugno, Solstizio d'estate e' il Tropico del cancro, 23,27)

La variazione dell'angolo di incidenza tra i due

$$\Delta\alpha = \left( \frac{\pi}{2} - e + \delta_{\text{sum}} \right) - \left( \frac{\pi}{2} - e + \delta_{\text{min}} \right) \cong 46,5$$

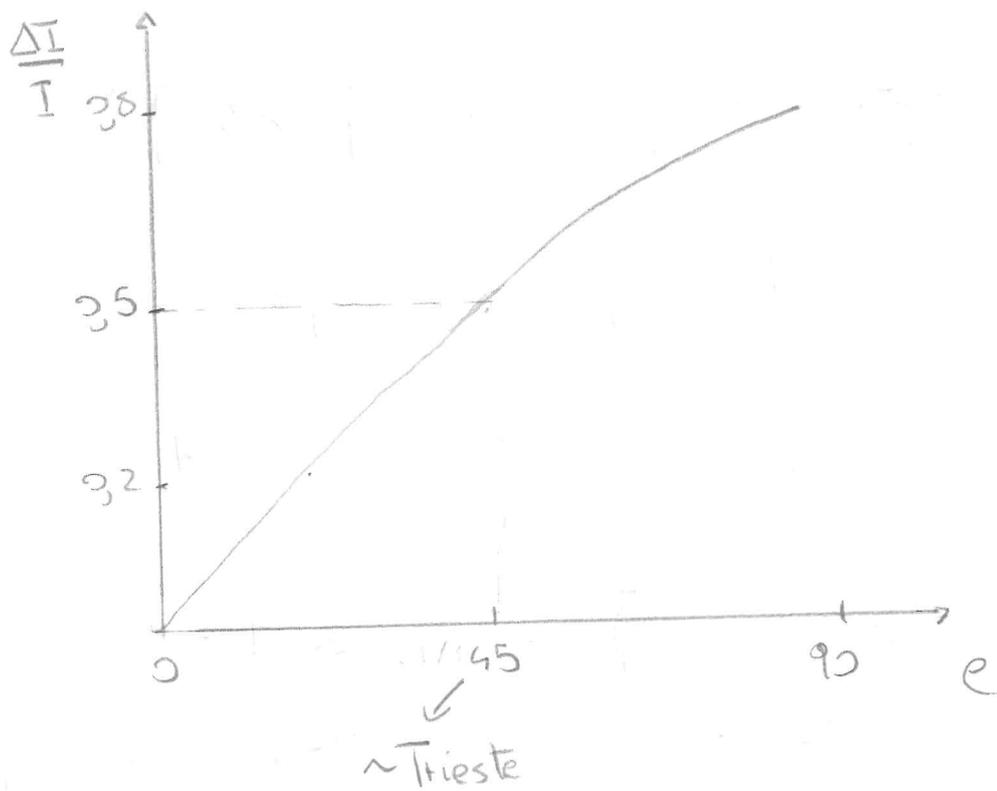
$\downarrow$   $23^{\circ}27'$                        $\downarrow$   $-23^{\circ}24'$

Variazione itraggiometrica tra i 2 solstizi:

$$\Delta I = I \left( \cos^2 \phi_{21/06} - \cos^2 \phi_{21/12} \right) = I \left( \sin^2(45^{\circ}) - \sin^2(46,5^{\circ}) \right)$$

Anaglo raggi rispetto alla normale:  
 $e - \delta$

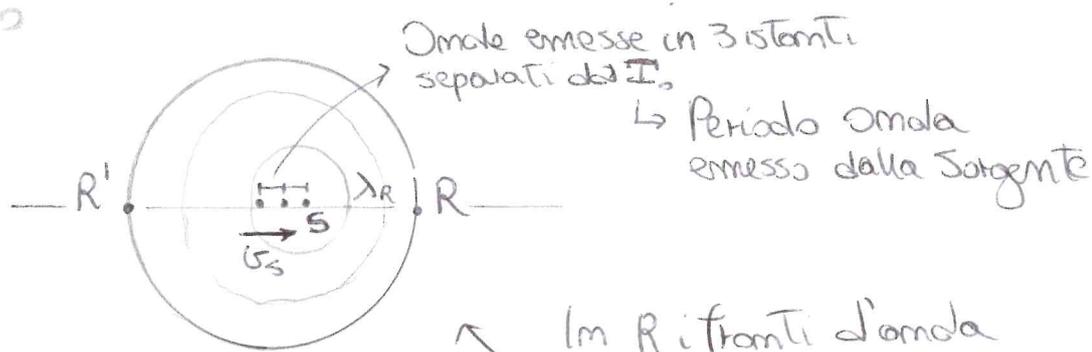
$\approx$  Trieste  $e \approx 45^{\circ} \approx 0,72$



• Effetto Doppler (onde e.m.)

→ Per onde meccaniche è legato al fatto che la velocità di propagazione dipende dal sistema di riferimento; f.e.g. la sorgente è in moto relativo rispetto al ricevitore con velocità  $\vec{v}_s$  (minore della velocità di propagazione  $v$ )

• Se sorgente in moto



# di fronti d'onda in  $\Delta t$  ricevuti da R

$$N = \frac{v \Delta t}{\lambda_R} \Rightarrow v_R = \frac{N}{\Delta t}$$

Im R i fronti d'onda sono più vicini di quando la sorgente è ferma:

lunghezza d'onda emessa

$$v/v_0$$

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{v}{v_0} - \frac{v_s}{v_0}$$

$$* v_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{v - v_s} v_0$$

Se invece è R a muoversi con velocità  $v_R$ , la distanza tra i fronti d'onda rimane  $\lambda_0$ , però il # di fronti d'onda che in un certo tempo  $\Delta t$  il ricevitore riceve è:  $N = \frac{(v - v_R) \Delta t}{\lambda_0} \Rightarrow v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v - v_R}{v} v_0$

In definitiva:

$$v_R = \frac{v - v_R}{v - v_s} v_0 \Rightarrow$$

Per un'onda che si propaga in un mezzo l'effetto Doppler non è simmetrico se a muoversi è R o S

→ Per le onde elettromagnetiche è corretto di parlare rispetto al mezzo perché di significato in quanto possono propagarsi nel vuoto. Inoltre, per la relatività ristretta, la velocità delle onde em nel vuoto è sempre  $c$ , in qualsiasi sistema di riferimento!

Dunque l'effetto Doppler deve essere SIMMETRICO (ovvero uguale se ci muoviamo e' S o R, e' unica variabile e' la velocità relativa tra i due).

Utilizzando le equazioni della relatività ristretta - in cui si trasformarsi da un sistema di riferimento all'altro c'è anche il tempo - si ottiene:

$$v_R = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_0 \quad \& \quad \lambda_R = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}} \lambda_0$$

↑ velocità relativa tra S & R

Questo effetto è utilizzato in Astrofisica per studiare la velocità di allontanamento delle galassie, nota  $\lambda_0$  per elementi chimici in laboratorio:

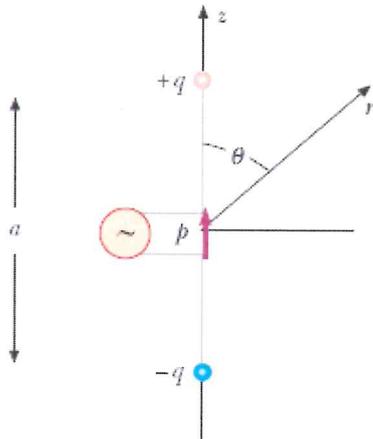
$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 + 1}$$

# Sorgenti di Onde Elettromagnetiche

## Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

Lo studio della radiazione di dipolo elettrico è particolarmente importante in quanto su di essa è basato il funzionamento delle antenne utilizzate per le trasmissioni di onde EM.

In Figura è schematizzata un'antenna di lunghezza  $a$ : l'oscillazione persistente degli elettroni al suo interno è prodotta da una tensione alternata applicata.



Dal punto di vista elettrico il sistema viene schematizzato come un dipolo elettrico oscillante: la carica  $q$  è concentrata agli estremi (le due sferette in Figura) e un opportuno generatore la fa variare sinusoidalmente:

*massimo*  $q_+ = q_-$

$$q = q_0 \sin \omega t \rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t,$$

*p = carica x distanza*

essendo  $i$  la corrente elettrica che percorre l'antenna. Si genera così un momento di dipolo elettrico oscillante:

*Carica ad 1 estremità*

$$\underline{p} = q a \underline{u}_z = q_0 a \sin \omega t \underline{u}_z = p_0 \sin \omega t \underline{u}_z, \quad p_0 = q_0 a = \frac{i_0 a}{\omega}.$$

*↳ Momento di dipolo massimo*

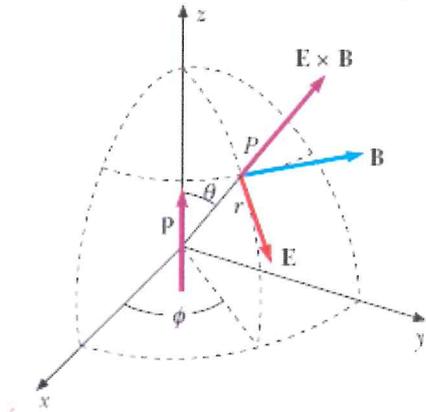
parallelo all'antenna stessa ovvero all'asse  $z$  di Figura..

Si dimostra che, a grandi distanze dal dipolo  $r \gg a$ , lungo una qualsiasi direzione individuata da un vettore  $r$  che parte dal centro del dipolo e forma un angolo  $\theta$  con  $p$ , si propaga un'onda elettromagnetica trasversale. Come si vede in Figura 10.29, il campo elettrico  $E$ , ortogonale a  $r$ , sta in un piano meridiano mentre il campo magnetico  $B$ , ortogonale a  $r$  e ad  $E$ , sta in un piano parallelo; come già anticipato, in ogni istante  $\vec{E} \times \vec{B}$  dà la direzione e il verso di propagazione dell'onda. I moduli dei campi  $E$  e  $B$  sono dati da:

Moduli campi E & B generati da dipolo oscillante:

N.B. Valida solo a grandi distanze ( $r \gg \lambda \gg d$ )

$$E = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t) \quad , \quad B = E/c$$



dependenza  
come onda sferica

Schema dei campi E & B  
emessi da un dipolo elettrico  
oscillante

In prossimità del  
dipolo  $E \propto 1/r^3$

La dipendenza da  $1/r$  è tipica dell'onda sferica. La velocità di propagazione è  $c = \omega/k$ . I valori dei campi dipendono, oltre che dalla distanza  $r$ , dall'angolo  $\theta$  e sono nulli in particolare per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , cioè lungo l'asse del dipolo. Il problema è a simmetria cilindrica intorno all'asse  $z$  del dipolo.

avere punto antenna

Per discutere almeno qualitativamente la formazione delle onde elettromagnetiche riporto in figura la configurazione delle linee del campo elettrico prodotto dal dipolo, assumendo come istante iniziale  $t$ , (a), quello in cui il momento di dipolo vale  $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_z$  e le linee di E hanno l'andamento tipico di un dipolo elettrico. All'istante  $t + T/4$ , (b), il momento di dipolo è nullo per cui non esistono linee di campo elettrico che hanno gli estremi sul dipolo. Fisicamente è successo che le linee di campo elettrico create nell'intervallo  $T/4$  si sono allontanate dal dipolo con velocità  $c$ , si sono chiuse su se stesse e hanno continuato ad allontanarsi. Intanto si formano nuove linee di campo elettrico con il verso opposto: nell'istante  $t + T/2$ , (c), il momento di dipolo elettrico vale  $-p_0 \mathbf{u}_z$ ; all'istante  $t + 3T/4$ , (d), il momento di dipolo elettrico è nuovamente nullo e quindi anche questo sistema di linee di campo elettrico si chiude e si allontana, deformando le linee di campo elettrico formate in precedenza. Dopo un periodo, istante  $t + T$ , (e), le linee di campo elettrico nell'intorno del dipolo elettrico sono le stesse dell'istante  $t$ , mentre il sistema di linee di campo elettrico formate in precedenza si è ulteriormente allontanato. Il processo si ripete ciclicamente producendo la configurazione di linee di campo elettrico mostrata, per i primi due periodi (f).

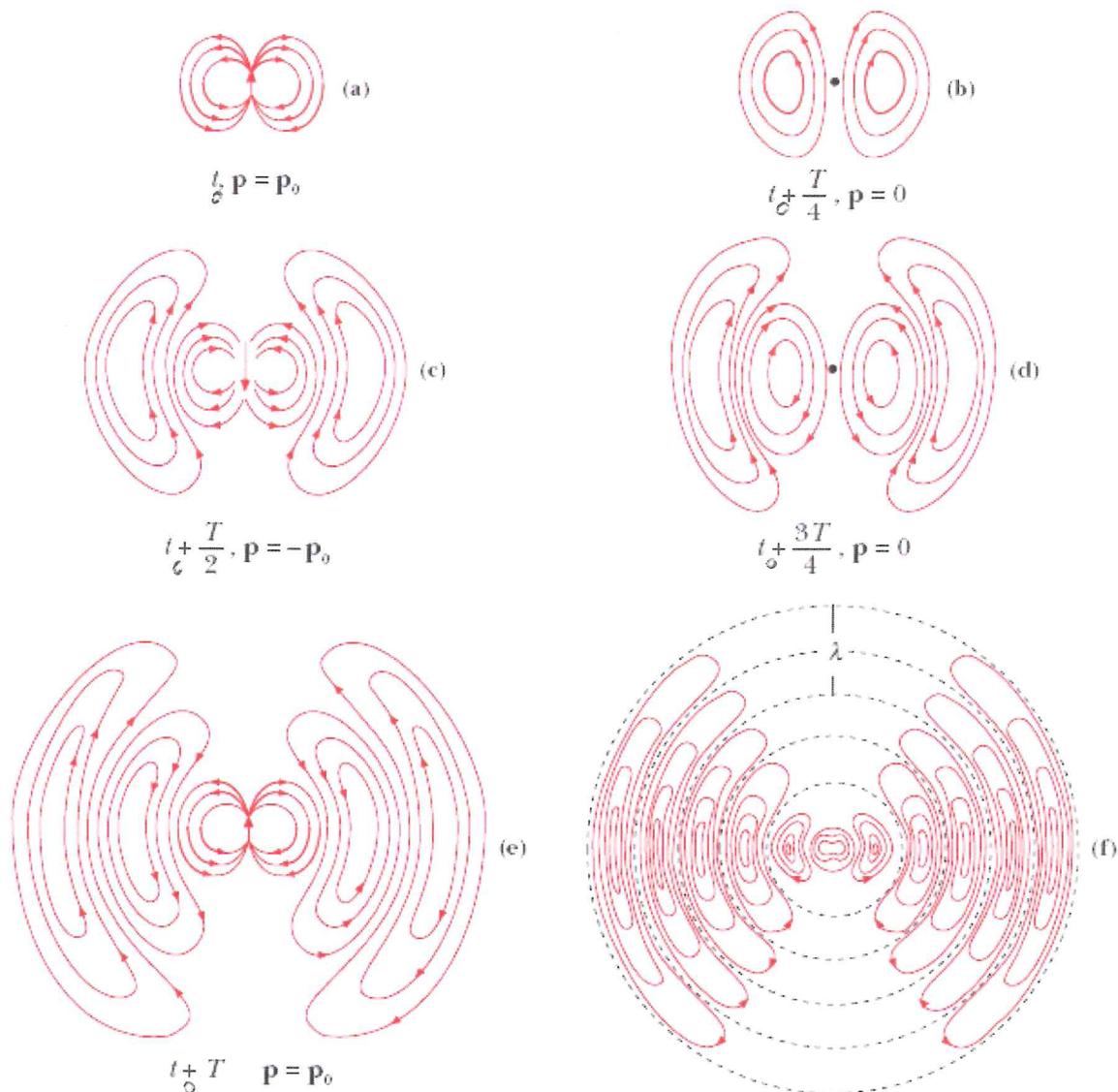
$$\vec{p} = p_0 \sin \omega t \hat{u}_z \quad \text{set } t_0 = \frac{T}{4} \quad \text{such that } \vec{p}(t_0) = p_0 \sin \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} \hat{u}_z$$

$$\text{per } t = t_0 + \frac{T}{4} = \frac{T}{2} \rightarrow p(t) = 0$$

$$\text{per } t = t_0 + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4} \rightarrow p(t) = p_0 \sin \frac{3\pi}{2} = -p_0$$

$$\frac{2\pi \cdot I}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$t_0 = \frac{T}{4} \Rightarrow \sin \omega t_0 = 1$$



Rappresentazione schematica della produzione e della propagazione, in tempi diversi, delle linee di campo elettrico prodotte da un dipolo elettrico oscillante.

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  associato al campo elettrico  $\mathbf{E}$  risulta, in Figura, in ogni punto perpendicolare al foglio. Le linee del campo magnetico sono quindi circonferenze che hanno il centro sull'asse del dipolo  $\mathbf{p}$  e il cui raggio aumenta progressivamente man mano che l'onda elettromagnetica si allontana dalla sorgente (proprio come le onde circolari che si propagano sulla superficie dell'acqua).

L'intensità dell'onda elettromagnetica emessa dal dipolo elettrico oscillante si calcola dall'equazione per E:

$$E_0 = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \omega^2$$

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2\theta,$$

$$I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \pi^2 v^4}{2\epsilon_0 c^3}.$$

Intensità  
dipolo  
Oscillante  
( $r \gg a \gg \lambda$ )

Essa dipende da  $1/r^2$ , come richiesto per un'onda sferica, e da  $\sin^2\theta$ : l'intensità irradiata da un dipolo elettrico oscillante è nulla lungo l'asse ed è massima nel piano equatoriale, dove vale

$$I_{\max} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{I_0}{r^2}.$$

Il termine costante  $I_0$  dipende soltanto dalle caratteristiche della sorgente; si noti la dipendenza da  $\omega^4$ .

In Figura è rappresentato in un diagramma polare la funzione  $I(\theta)$ : con  $r$  fissato, per ogni valore di  $\theta$  si riporta dal centro del dipolo un segmento di lunghezza proporzionale a  $I(\theta)$ . Le punte dei segmenti stanno sulla curva disegnata, avente simmetria cilindrica rispetto all'asse del dipolo. Si dice che il dipolo elettrico presenta un diagramma di intensità con due lobi. È questo un esempio di fronte d'onda sferica con intensità non uniforme sul fronte d'onda.

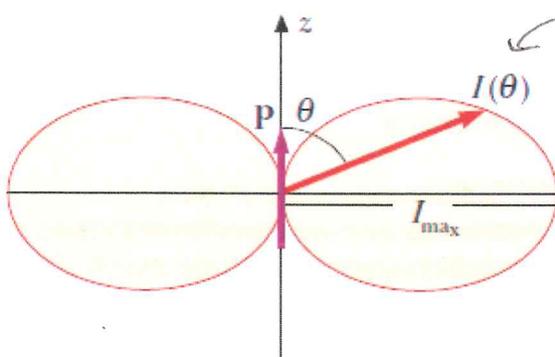
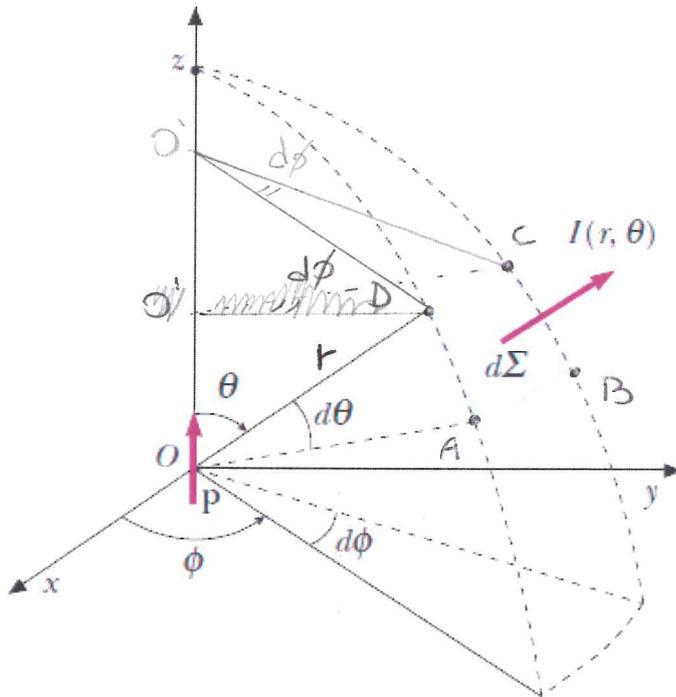


Diagramma d'intensità  
di un dipolo con i 2  
caratteristiche lobi

Diagramma polare dell'intensità dell'onda elettromagnetica emessa da un dipolo elettrico oscillante.

La potenza emessa dal dipolo elettrico oscillante si ottiene integrando sulla superficie sferica:

$$\mathcal{P} = \int_{\Sigma} I(\theta) d\Sigma ,$$



$$\begin{aligned} d\Sigma &= (\overline{AB})(\overline{AD}) = \\ &= \underbrace{(r \sin \theta d\phi)}_{O'D} (r d\theta) \end{aligned}$$

dove l'integrale è esteso ad una superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r \gg \lambda \gg a$  con centro nel dipolo stesso; l'elemento di superficie sferica in coordinate polari, è  $d\Sigma = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$  per cui

Tenuto conto che

$$\mathcal{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta .$$

Tenuto conto che

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4}{3} ,$$

risulta in conclusione

$$\mathcal{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{4\pi^3 p_0^2 \nu^4}{3\epsilon_0 c^3} = \frac{8\pi}{3} I_0 .$$

Fissato il valore di  $p_0$ , anche la potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione  $\omega$ , ovvero della frequenza  $\nu$ .

**Radiazione emessa da una carica elettrica in moto: accelerato.**

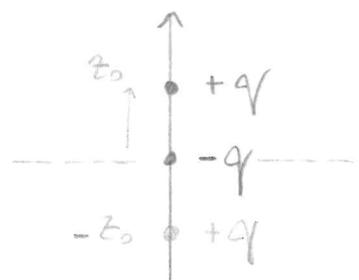
Una carica elettrica in moto accelerato <sup>→ Superficie</sup> irradia onde elettromagnetiche. Infatti una carica in moto e' assimilabile ad una corrente  $I=eAv$ , che quindi produce un campo B (legge di Ampere-Maxwell). Se accelerata il campo B sara' variabile nel tempo, e quindi per le equazioni di Maxwell produrra' un campo elettrico (legge di Faraday); a sua volta un campo elettrico variabile mi genera un campo magnetico, e cosi' via. Questo dà luogo alla propagazione di un onda EM.

• Riscriviamo la potenza irradiata in funzione dell'accelerazione  
 Un dipolo elettrico oscillante può essere rappresentato anche con una carica  $-q$  fissa nell'origine e una carica  $+q$  che si muove lungo l'asse z con legge  $z = z_0 \sin \omega t$ , che oscilla cioè con moto armonico tra  $+z_0$  e  $-z_0$ . L'accelerazione della carica  $+q$  e il valor medio del suo quadrato sono rispettivamente:

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t, \quad a_m^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\omega^4 z_0^2 \sin^2 \omega t'}_{a(t)^2} dt' = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}$$

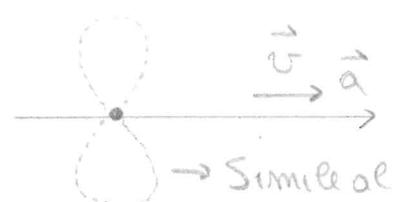
Il valore massimo del momento di dipolo è:

$$p_0 = qz_0 \Rightarrow p_0^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2q^2 a_m^2; \quad \omega^4 = 2a_m^2/z_0^2$$



Che in base alla formula della potenza irradiata da un dipolo risulta:

\*) 
$$P_{Larmor} = \frac{q^2 a_m^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$
 Formula di Larmor 
$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$



è nota come formula di Larmor e non è relativistica, ovvero è valida per velocità della particella  $\ll c$ . L'emissione è nulla lungo la direzione del moto (come nel dipolo), e avviene preferenzialmente in direzione perpendicolare al moto.

Nota: Nel modello di Bohr l'elettrone dell'atomo di idrogeno compie un'orbita circolare di raggio  $r = 0.53 \cdot 10^{-10} m$ . Da semplici considerazioni classiche (Forza centripeta = Forza di Coulomb) si ricava una velocità orbitale di  $2.19 \cdot 10^6 m/s$  ed un'accelerazione  $a=v^2/r=9.02 \cdot 10^{22} m/s^2$ . Secondo la formula di Larmor dunque l'elettrone perderebbe per irraggiamento un'energia pari a  $2.88 \cdot 10^{11} eV/s$ , ovvero dissiperebbe la sua energia di legame (13.6 eV) in  $\sim 4.5 \cdot 10^{-11} s$ , ovvero secondo la fisica classica l'atomo non potrebbe essere stabile! L'incongruenza si risolve

\*) Una derivazione più rigorosa richiede di calcolare il campo e.m. dai potenziali scalari (V) e vettoriali (A)

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad B = \nabla \times A \quad \text{con} \quad \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 V = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$