14 novembre

Se f è una funzione che ammette derivate fino all'ordine n in x_0 e $p(x)$ è un polinomio con $\boxed{\deg p(x) \leq n}$ e

$$f(x) = p(x) + \boxed{o((x-x_0)^n)}$$

allora $p(x)$ è il polinomio di Taylor di ordine n di f rispetto a x_0.

Esempi Ricordiamoci che $\forall\ a \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^a = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j}_{\text{polinomi di McLaurin}} + o(x^n)$$

dove $\binom{a}{0} = 1$

$j \geq 1$ $\quad \binom{a}{j} = \dfrac{\prod_{k=1}^{j} (a-k+1)}{j!} = \dfrac{a\,(a-1)\cdots(a-j+1)}{j!}$

$j = 1$ $\quad \binom{a}{1} = a$

Quindi ad esempio

$$(1+x)^{-1} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{-1}{j} x^j}_{\text{polinomi di McLaurin}} + o(x^n)$$

$$1 + x + \cdots + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x \neq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

La somma è un polinomio di grado $= n$. Potrò dire che è il polinomio di McLaurin di ordine n della funzione $\frac{1}{1-x}$, se sono in grado di dimostrare che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j + o(x^n)$$

È evidente che $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$. Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{n}+1}}{\cancel{x^n}(1-x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Concludiamo che $\sum_{j=0}^{n} x^j$ è il polinomio di McLaurin di ordine n di $\frac{1}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j + o(x^n) \qquad \text{Ponendo } x = -y$$

$$-x = y$$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^{n} (-y)^j + o((-y)^n) \qquad y = x$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j + o((-1)^n x^n)$$

Notare che $o((-1)^n x^n) = o(x^n)$ perchè

$$\lim_{x \to 0} \frac{o((-1)^n x^n)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{o((-1)^n x^n)}{(-1)^n x^n} (-1)^n =$$

$$= 0\,(-1)^n = 0$$

Pertanto è vero quanto scritto sopra, che $o((-1)^n x^n) = o(x^n)$

$$\frac{1}{1+x} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j}_{\text{è il polinomio di McLaurin di ordine } n.} + o(x^n)$$

Sostituendo x con x^2 nella formula precedente

$$\frac{1}{1+x^2} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j}}_{\text{è il pol di McLaurin di ordine } 2n} + o(x^{2n})$$

Esempio $\left(\lg(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x}$ Utilizziamo

noi avanti questa relazione.

$$\left(\lg(1+x)\right)^{(n)} = \left(\left(\lg(1+x)\right)'\right)^{(n-1)} =$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \lg(1+x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \frac{d}{dx} \lg(1+x)$$

$$= \left((1+x)^{-1}\right)^{(n-1)} = \prod_{j=1}^{n-1} (\cancel{-1}-j+\cancel{1})(1+x)^{-1-(n-1)}$$

$$\left(\left((1+x)^a\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\ (1+x)^{a-n}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} (-j) \quad x^{-n} = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} j\,(1+x)^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (1+x)^{-n}$$

$$\left(\lg(1+x)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ (1+x)^{-n} \qquad \forall x > -1$$

Per $x = 0$

$$f^{(n)}(0) = \left(\lg(1+x)\right)^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$f(0) = \lg 1 = 0$

Il polinomio di McLaurin di ordine n di $f(x) = \lg(1+x)$ per definizione è

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\cancel{(j-1)!}}{\underbrace{j!}_{j\cdot\cancel{(j-1)!}}} x^j$$

Usando $j! = j \cdot (j-1)!$

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j$$

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j = x$$

$$P_2(x) = \sum_{j=1}^{2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j = x - \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad \ldots$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Formula di Lagrange

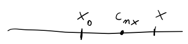
Teor Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Supponiamo che $f', \dots, f^{n+1}$ esistono in (a,b). Allora vale per $x\neq x_0$

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

con la seguente formula: $\exists$ un punto c_{nx} strettamente compreso tra x ed x_0 t.c.

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Osservazione. Si può riscrivere



$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dim Per fissare le idee supponiamo $x>x_0$ come in figura. Quindi abbiamo l'intervallo $[x_0,x]$

$R(y) = R_{n,x_0}(y)$ $\quad y\in[x_0,x]$ $\quad R(x_0)=0$

$P_n = P_{n,x_0}$ $\quad R(y) = f(y) - P_n(y)$. $\quad n\geq 1$

osservare che $R(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$

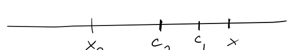
$R'(x_0) = f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0$

$\vdots$

$R^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0$

$$\frac{R(y)}{(y-x_0)^{n+1}} = \frac{R(y)-R(x_0)}{(y-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} =$$

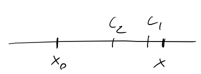
Per il teorema di Cauchy $\exists$ $c_1\in(x_0,x)$ t.c.



$$= \frac{R'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n} = \frac{R'(c_1)-R'(x_0)}{(n+1)(c_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n} =$$

Per il teorema di Cauchy $\exists$ $c_2\in(x_0,c_1)$ t.c.

$$= \frac{R''(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}}.$$



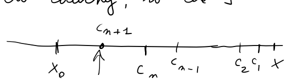
$\exists$ $x_0<c_2<c_1<x$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R''(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}}$$

Procedendo così restano definiti $x_0<c_n<c_{n-1}<\dots<c_2<c_1<x$ tali che

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R^{(n)}(c_n)}{(n+1)!\,(c_n-x_0)} = \frac{R^{(n)}(c_n)-\overbrace{R^{(n)}(x_0)}^{=0}}{(n+1)!\,(c_n-x_0)-(n+1)!\,(x_0-x_0)}$$

Applicando una ulteriore volta Cauchy, si ha che $\exists$ $x_0<c_{n+1}<c_n$ tale che



$$= \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{(f-P_n)^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1}) - P_n^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Abbiamo appena dimostrato che $\forall$ $x>x_0$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

per un opportuno numero $x_0<c_{n+1}<x$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Questa è la formula cercata! Per ottenere l'enunciato basta porre $c_{nx} = c_{n+1}$

Esempio Approssimare e con un numero razionale con un errore $< 10^{-3}$

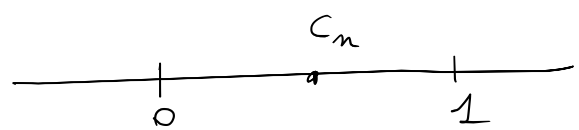
$$e^x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}}_{P_n(x)} + R_n(x)$$

Per $x = 1$

$$e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + R_n(1)$$

$$P_n(1) \in \mathbb{Q}$$

$\exists\, c_n$



$$0 < R_n(1) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \qquad 0 < c_n < 1$$

$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)! > 3000$$

$$(n+1)! = \begin{cases} n=1 & 2 \\ n=2 & 6 \\ n=3 & 24 \\ n=4 & 120 \\ n=5 & 720 \\ n=6 & 5040 \quad > 3000 \end{cases}$$

$P_6(1)$ è una approssimazione razionale di e con errore $< \frac{1}{1000}$