

15 novembre

Esempio di applicazione della formula di Lagrange:

e, il numero di Nepero, è irrazionale.

Dim. Supponiamo per assurdo che $e \in \mathbb{Q}$.

Usiamo $e^x = P_n(x) + R_n(x)$ per $x=1$

$$e = P_n(1) + R_n(1)$$

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} \quad \forall n$$

dove $0 < c_n < 1$

$\exists a, b \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad e = \frac{a}{b}$

Scegliamo $n \geq b$

$$e = \frac{a}{b} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} \quad \cdot n!$$

$$\frac{n!}{b} \cdot a = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \frac{n!}{(n+1)!} e^{c_n} \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (b-1) \cdot b \cdot \dots \cdot n}{b} \cdot a = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \frac{e^{c_n}}{n+1}$$

$$a \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^n j = \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{j=k+1 \\ j \neq b}}^n j + \frac{e^{c_n}}{n+1}$$

$\underbrace{\prod_{j=1}^n j}_{j \neq b} = \prod_{j \in \mathbb{N}} j$

$$0 < \frac{e^{c_n}}{n+1} = \underbrace{m}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{N}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - N > 0$$

$$\Rightarrow m - N \in \mathbb{N}$$

Quindi, abbiamo dimostrato che per ogni $n \geq b$

si ha $\frac{e^{c_n}}{n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{e^{c_n}}{n+1} \geq 1$

Ricordo che per $0 < c_n < 1$

$$1 \leq \frac{e^{c_n}}{n+1} < \frac{e}{n+1} \quad \forall n \geq b$$

0

Assurdo perché
successivamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} \geq 1$$

$$0 \geq 1 \quad \text{folw.}$$

8 luglio Es 4

Verificare che $f(x) = 1 + 3x + x^3$ è biettivo da $\mathbb{R}$ in se stesso e calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 1 della funzione inversa g

Risposta $f'(x) = 3 + 3x^2 \geq 3 \quad \forall x$

$\Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente $\Rightarrow f$ iniettivo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

per il teorema dei
valori intermedi.

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione inversa.

Il polinomio di McLaurin di g

$$p(x) = g(0) + g'(0)x$$

$$g(0) = ? \quad g'(0) = ?$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$g(0) = \cancel{x_0}$$

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \boxed{f(x_0) = 0} \Leftrightarrow \boxed{g(0) = x_0}$$

x_0 è uno zero $x^3 + x + 1 = 0 \quad *$

$g(0)$ è l'unico radice reale dell'equazione *

$$g'(0) = ? \quad g(0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$$

Usiamo la formula della derivata della funzione inversa

$$g'(0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{3 + 3x_0^2}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \underbrace{\sum_{j=0}^m (-1)^j x^{2j}}_{P_{2m}(x)} + o(x^{2m})$$

$$P_{2m+1}(x) = ?$$

$$P_{2(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j x^{2j} = \underbrace{\sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j}}_{P_{2n}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}_{P_{2n+1}(x)}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Rightarrow P_{2n+1} = P_{2n}$$

$$P_{2n+1} = P_{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad \text{calcoliamo } P_n(x) \quad \forall n$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n+1}) + o(x^{2n})$$

Cominciamo con la ricerca di $P_{2n}(x)$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}}_{\deg \leq 2n} + \overbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) + o(x^{2n})}^{o(x^{2n})}$$

$\forall x \in P_{2n}(x)$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n+1}) + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n+2})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n+1}) + o(x^{2n+2})$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}}_{P_{2n+1}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + o(x^{2n+1}) + o(x^{2n+2})}_{o(x^{2n+1})}$$

Ex 4 12/2/24

P_6 per $f(x) = \frac{1}{1+x+x^3}$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^6 (-1)^j y^j + o(y^6)$$

$$y = x + x^3$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^6 (-1)^j (x+x^3)^j + o((x+x^3)^6)$$

$$o((x+x^3)^6) = o(x^6) \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o((x+x^3)^6)}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o((x+x^3)^6)}{(x+x^3)^6}$$

$$\frac{(x+x^3)^6}{x^6} = 1$$

$\Rightarrow *$

$$f(x) = \sum_{j=0}^6 (-1)^j (x+x^3)^j + o(x^6)$$

