ESERCIZI SUL DETERMINANTE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Considera una generica matrice 3×3 a coefficienti in un campo K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Usando la definizione del determinante secondo lo sviluppo lungo la prima colonna, **dimostra** che vale la formula di Sarrus:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Esercizio 2

Calcola il determinante delle seguenti matrici 3×3 usando sia lo sviluppo lungo la prima colonna, sia la regola di Sarrus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 1 & 6 & 14 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -2 \\ -4 & -14 & -5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Calcola il determinante delle seguenti matrici usando sia lo sviluppo lungo una riga che lo sviluppo lungo una colonna:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 1 \\ -3 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -11 \\ -1 & -5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

Calcola l'inversa delle seguenti matrici sia tramite operazioni elementari sulle righe sia attraverso l'uso della matrice dei cofattori:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -5 & -7 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5

Sia p un polinomio a coefficienti interi, $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Qui $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi.

Ricorda i seguenti fatti:

- un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ si dice una *radice* per p se vale che $p(r) = 0$;
- se un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ è una radice per p, allora se scriviamo $r = s/t$ dove s e t sono numeri interi primi tra di loro abbiamo che s divide a_0 e t divide a_n; pertanto le possibili candidate radici di p in $\mathbb{Q}$ si ottengono considerando tutte le possibili frazioni con al numeratore un divisore di a_0 e al denominatore un divisore di a_n (bisogna considerare, per ogni frazione, anche quella con segno opposto);
- per il teorema di Ruffini, un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ è una radice per p se e solo se p si può scrivere come $p(x) = (x-r) \cdot q(x)$ dove q è un altro polinomio (possiamo ottenere q attraverso l'algoritmo di divisione tra polinomi).

Ricorda inoltre che

- se $p = ax^2 + bx + c$ è un polinomio di secondo grado e se r_1 ed r_2 sono soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora vale che $p = a(x-r_1)(x-r_2)$.

Scomponi ciascuno dei seguenti polinomi in un prodotto di fattori lineari:

$$p = x^3 - 2\,x^2 - x + 2\,,$$
$$p = 4\,x^3 - 7\,x + 3\,,$$
$$p = 12\,x^3 - 20\,x^2 - x + 6\,,$$
$$p = x^3 - x^2 - 12\,x\,.$$