ESERCIZI SU APPLICAZIONI LINEARI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Considera l'applicazione lineare

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

determinata dalle condizioni

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivi l'immagine del generico elemento $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^3$ attraverso f.

Esercizio 2

Considera i due insiemi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifica che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi per $\mathbb{R}^2$. **Determina** la matrice rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dell'applicazione identica:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Esercizio 3

Considera le seguenti tre applicazioni lineari

$$\begin{array}{rccc} f_1\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y-z \\ x-y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_3\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y+z \\ x-y-2z \end{pmatrix} \end{array}$$

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. **Verifica** se, dato $i \in \{1,2,3\}$, l'insieme $\{f_i(e_1), f_i(e_2), f_i(e_3)\}$ sia o meno una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4

Disegna nel piano le immagini dei due vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

attraverso le applicazioni lineari L_A, dove la matrice A è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Verifica che la funzione

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & x + \sqrt[3]{x^3 + y^3} \end{array}$$

è omogenea, ma non lineare.

Esercizio 6

Per ciascuna delle seguenti matrici $A \in M_3(\mathbb{Q})$, **determina** una base di $\ker(L_A)$ e **determina** se il vettore

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

appartenga o meno a $\operatorname{im}(L_A)$; in tal caso, determina tutti gli elementi del dominio di L_A la cui immagine sia $\bar{w}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio extra 1

Ricorda che sull'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

si possono definire una somma tra funzioni e una moltiplicazione di una funzione per un numero reale, rendendo $\mathcal{F}$ uno spazio vettoriale.

Considera l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua su tutto } \mathbb{R}\}$$

Dimostra che l'insieme $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}$.

Considera l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile su tutto } \mathbb{R} \text{ ed } f' \text{ è continua}\}$$

Dimostra che l'insieme $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Considera ora la funzione

$$\begin{array}{rccc} D\colon & C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

che a ogni funzione derivabile associa la sua funzione derivata.

Dimostra che D è un'applicazione lineare.

Esercizio extra 2

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$. Supponiamo che $f\colon V \to W$ sia una funzione additiva. **Dimostra** che f è anche $\mathbb{Q}$-omogenea, ovvero per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$ vale $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$, pertanto f è un'applicazione lineare. Per farlo, procedi in questo modo:

(1) Dimostra che $f(0_V) = 0_W$, dove 0_V e 0_W sono gli elementi neutri della somma in V e in W.
(2) Dimostra per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $v \in V$ vale $f(n \cdot v) = n \cdot f(v)$.
(3) Dimostra che per ogni $m \in \mathbb{Z}$ e per ogni $v \in V$ vale $f(m \cdot v) = m \cdot f(v)$.
(4) Dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $v \in V$ vale $f(n^{-1} \cdot v) = n^{-1} \cdot f(v)$.
(5) Dimostra che per ogni $m \in \mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e per ogni $v \in V$ vale $f(\frac{m}{n} \cdot v) = \frac{m}{n} \cdot f(v)$.