Def. (applicazione lineare che "prende le coordinate")

sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione finita e sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V; definiamo la funzione che prende le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ in questo modo: essa è una funzione

$$F_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n$$

che agisce nel modo seguente: se $v\in V$, allora possiamo scrivere in maniera unica v come combinazione lineare di $v_1,\dots,v_n$:

$$v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$$

definiamo $F_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$; si può verificare che $F_{\mathcal{B}}$ è una applicazione lineare ed è inoltre biettiva (quindi è invertibile); si dice quindi che $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio: dimostrare che se $f: V\longrightarrow V'$ è un'applicazione lineare biettiva, allora $f^{-1}: V'\longrightarrow V$ è un'applicazione lineare.

Def. sia $f: V\to V'$ un'applicazione lineare; definiamo il nucleo di f come il sottoinsieme:

$$\ker f=\{v\in V : f(v)=0\}$$

quindi $\ker f\subseteq V$; definiamo l'immagine di f come il sottoinsieme

$$\operatorname{im} f=\{v'\in V' : \text{esiste } v\in V \text{ tale che } f(v)=v'\}$$

quindi $\operatorname{im} f\subseteq V'$.

Prop. sia $f: V\to V'$ un'applicazione lineare; allora $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V e $\operatorname{im} f$ è un sottospazio vettoriale di V'

Dim: cominciamo considerando $\ker f$:

i. sappiamo che, dato che f è un'applicazione lineare, vale $f(0)=0$, ovvero $0\in\ker f$.

ii. siano $v_1,v_2\in\ker f$; vogliamo mostrare che $v_1+v_2\in\ker f$; per ipotesi

$$f(v_1)=0 \qquad e \qquad f(v_2)=0$$

dimostrare che $v_1+v_2\in\ker f$ equivale a mostrare che $f(v_1+v_2)=0$

$$f(v_1+v_2)\overset{AL1}{=} f(v_1)+f(v_2)=0+0=0$$

quindi $v_1+v_2\in\ker f$.

iii. sia $v\in\ker f$ e sia $\lambda\in K$; vogliamo mostrare che $\lambda\cdot v\in\ker f$; per ipotesi

$$f(v)=0$$

mostrare che $\lambda\cdot v\in\ker f$ equivale a mostrare che $f(\lambda\cdot v)=0$;

$$f(\lambda\cdot v)\overset{AL2}{=}\lambda\cdot f(v)=\lambda\cdot 0=0$$

quindi $\lambda\cdot v\in\ker f$

consideriamo $\operatorname{im} f$

i. sappiamo che $f(0)=0$, pertanto $0\in\operatorname{im} f$

ii. siano $v_1',v_2'\in\operatorname{im} f$; vogliamo mostrare che $v_1'+v_2'\in\operatorname{im} f$; per ipotesi:

esiste $v_1\in V$ tale che $f(v_1)=v_1'$ ed esiste $v_2\in V$ tale che $f(v_2)=v_2'$

per mostrare che $v_1'+v_2'\in\operatorname{im} f$ mostriamo che esiste un $v\in V$ tale che $f(v)=v_1'+v_2'$; consideriamo v_1+v_2:

$$f(v_1+v_2)\overset{AL1}{=}f(v_1)+f(v_2)=v_1'+v_2'$$

quindi $v_1'+v_2'\in\operatorname{im} f$

iii. sia $v'\in\operatorname{im} f$ e sia $\lambda\in K$; vogliamo mostrare che $\lambda\cdot v'\in\operatorname{im} f$; per ipotesi

esiste $v\in V$ tale che $f(v)=v'$

consideriamo ora $\lambda\cdot v\in V$:

$$f(\lambda\cdot v)\overset{AL2}{=}\lambda\cdot f(v)=\lambda\cdot v'$$

quindi $\lambda v'\in\operatorname{im} f$.

Nucleo e immagine governano due proprietà delle applicazioni lineari.

Prop: sia $f: V\longrightarrow V'$ un'applicazione lineare; allora

1. f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f=\{0\}$
2. f è suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{im} f=V'$

Dim: 2. f è suriettiva $\Leftrightarrow \forall v'\in V'$ esiste $v\in V$ tale che $f(v)=v'$

$$\Leftrightarrow \operatorname{im} f=V'$$

1. "$\Rightarrow$" supponiamo che f sia iniettiva; questo significa che, se $v,w\in V$ sono tali che $f(v)=f(w)$, allora $v=w$; consideriamo quindi $v\in\ker f$, e dunque $f(v)=0$; d'altra parte, sappiamo che vale sempre $f(0)=0$; pertanto $f(v)=f(0)$ e per iniettività vale quindi $v=0$; pertanto l'unico vettore in $\ker f$ è il vettore nullo, ovvero $\ker f=\{0\}$

"$\Leftarrow$" supponiamo che $\ker f=\{0\}$; prendiamo $v,w\in V$ tali che $f(v)=f(w)$; l'obiettivo è mostrare che $v=w$ (questo dimostrerà che f è iniettiva) se $f(v)=f(w)$, allora $f(v)-f(w)=0$, allora $f(v-w)=0$ per linearità; quindi $v-w\in\ker f$, ma l'unico elemento in $\ker f$ è 0, quindi $v-w=0$, ovvero $v=w$.

Teorema (teorema di struttura per applicazioni lineari)

siano V e V' due spazi vettoriali su K di dimensione finita (non è necessario che la dimensione sia la stessa); sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V e siano $v_1',\dots,v_n'\in V'$ vettori qualsiasi (l'unica richiesta è che tali vettori $v_1',\dots,v_n'$ siano tanti quanti quelli di $\mathcal{B}$, non c'è nessuna richiesta da ottenere quindi i vettori potrebbero essere ad esempio tutti uguali, oppure tutti nulli); allora esiste un'unica applicazione lineare

$$f: V\longrightarrow V'$$

tale che $f(v_i)=v_i'$ per ogni $i\in\{1,\dots,n\}$.

Dim: supponiamo che una tale applicazione esista; mostriamo che essa è unica; per ipotesi, $\mathcal{B}$ è una base di V, quindi se $v\in V$, allora v si può scrivere in maniera unica come $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$ per certi $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$; allora

$$\begin{aligned}f(v)&=f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=f(\lambda_1v_1)+\dots+f(\lambda_nv_n)\\&=\lambda_1f(v_1)+\dots+\lambda_nf(v_n)\\&=\lambda_1v_1'+\dots+\lambda_nv_n'\end{aligned}$$

pertanto, una volta fissati $\mathcal{B}$ e $\{v_1',\dots,v_n'\}$, il vettore $f(v)$ dipende unicamente da v, ovvero f è univocamente determinata;

dobbiamo ora dimostrare che tale f esiste e ci faremo aiutare da quanto abbiamo dimostrato finora; dato $v\in V$, scriviamo in maniera unica $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$ e ora definiamo $f(v)$ come il vettore $\lambda_1v_1'+\dots+\lambda_nv_n'$; dobbiamo ora dimostrare che l'applicazione lineare così definita soddisfa le proprietà che abbiamo richiesto; verifichiamo innanzitutto che $f(v_i)=v_i'$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$; sappiamo che

$$v_i=0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_{i-1}+1\cdot v_i+0\cdot v_{i+1}+\dots+0\cdot v_n$$

quindi per definizione $f(v_i)=0\cdot v_1'+\dots+0\cdot v_{i-1}'+1\cdot v_i'+0\cdot v_{i+1}'+\dots+0\cdot v_n'$ ovvero $f(v_i)=v_i'$; rimane da dimostrare che f così definita è una applicazione lineare; scegliamo quindi $v,w\in V$; dobbiamo mostrare che $f(v+w)=f(v)+f(w)$; abbiamo che

$$v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n \qquad e \qquad w=\mu_1v_1+\dots+\mu_nv_n$$

per certi $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n\in K$; per definizione

$$f(v)=\lambda_1v_1'+\dots+\lambda_nv_n' \qquad e \qquad f(w)=\mu_1v_1'+\dots+\mu_nv_n'$$

d'altro canto

$$v+w=(\lambda_1+\mu_1)v_1+\dots+(\lambda_n+\mu_n)v_n$$

allora sempre per definizione

$$f(v+w)=(\lambda_1+\mu_1)v_1'+\dots(\lambda_n+\mu_n)v_n'$$

allora

$$\begin{aligned}f(v+w)&=(\lambda_1v_1'+\dots+\lambda_nv_n')+(\mu_1v_1'+\dots+\mu_nv_n')\\&=f(v)+f(w)\end{aligned}$$

analogamente si dimostra che $f(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot f(v)$ con $v\in V$ e $\lambda\in K$.

Esempio: consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la base standard $\mathcal{E}=\{e_1,e_2\}$:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i due elementi

$$w_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \qquad w_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$$

il teorema precedente ci dice che esiste un'unica applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tale che $f(e_1)=w_1$ e $f(e_2)=w_2$; inoltre, se $v\in\mathbb{R}^2$, $v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, allora $v=a\cdot e_1+b\cdot e_2$

pertanto $f(v)=a\cdot w_1+b\cdot w_2$, ovvero

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)&=a\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}2a-b\\3a+4b\\a+2b\end{pmatrix}\\&=\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\\1&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero $f=L_A$ con A

Oss.: sia $f: V\longrightarrow V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su K di dimensione finita e sia $v_1,\dots,v_n$ un sistema di generatori di V; allora $f(v_1),\dots,f(v_n)$ è un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$, infatti se $v'\in\operatorname{im} f$, allora esiste $v\in V$ tale che $f(v)=v'$; per ipotesi $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$ per certi $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$; allora

$$\begin{aligned}f(v)&=f(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=\\&=f(\lambda_1v_1)+\dots+f(\lambda_nv_n)\\&=\lambda_1f(v_1)+\dots+\lambda_nf(v_n)\end{aligned}$$

quindi v' è combinazione lineare di $f(v_1),\dots,f(v_n)$, ovvero questi ultimi sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$.

Oss.: consideriamo una matrice $A\in M_{m,n}(K)$; allora abbiamo

$$L_A: K^n\longrightarrow K^m$$

se in K^n consideriamo la base standard $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ con

$$e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\longleftarrow (i)$$

allora vale che $A\cdot e_i=A^{(i)}$ (i-esima colonna di A); in altre parole $L_A(e_i)=A^{(i)}$; dato che $\mathcal{E}$ è una base di K^n, e quindi in particolare un sistema di generatori di K^n, vale che

$$\begin{aligned}\operatorname{im} L_A&=\operatorname{span}(L_A(e_1),\dots,L_A(e_n))\\&=\operatorname{span}(A^{(1)},\dots,A^{(n)})\end{aligned}$$

perché $L_A(e_1),\dots,L_A(e_n)$ è un sistema di generatori di $\operatorname{im} L_A$; in conclusione

$$\begin{aligned}\dim\operatorname{im} L_A&=\dim\operatorname{span}(A^{(1)},\dots,A^{(n)})\\&=\operatorname{rg} A.\end{aligned}$$