Def: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora definiamo il <u>rango</u> di f come $\dim(\operatorname{im}(f))$.

Da quanto abbiamo visto, il rango di un'applicazione lineare generalizza il rango di una matrice.

Teorema: (teorema di dimensione per applicazioni lineari)
sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora vale che:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

ovvero in altre parole

$$\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$$

Dim: sia $n = \dim V$ e fissiamo una base $\mathcal{B}_{\ker}$ di $\ker f$; sia $\mathcal{B}_{\ker} = \{v_1, \dots, v_k\}$, dunque $\dim \ker f = k$ (e sappiamo che $k \le n$); l'obiettivo ora diviene quindi dimostrare che $\dim \operatorname{im} f = n-k$; per fare questo, mostreremo che esiste una base di $\operatorname{im} f$ composta da $n-k$ elementi; costruiamo la base candidata nel modo seguente; dato che $v_1 \dots v_k$ sono una base di $\ker f$, essi sono in particolare linearmente indipendenti; per il teorema di estensione a una base, esiste una base $\mathcal{B}$ di V che contiene $v_1, \dots v_k$, ovvero è della forma

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{k}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{n-k}\}$$

consideriamo i vettori $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$; tali vettori sono in $\operatorname{im} f$ e ora dimostriamo che sono in effetti una base di $\operatorname{im} f$

i. dimostriamo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti; consideriamo quindi una combinazione lineare

$$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$$

dobbiamo mostrare che $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$; dato che f è lineare vale

$$f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0$$

quindi $\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \ker f$ (dato che la sua immagine attraverso f è 0); allora, dato che $v_1 \dots v_k$ è una base di $\ker f$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ tali che

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

ovvero

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - \lambda_{k+1} v_{k+1} - \dots - \lambda_n v_n = 0$$

quest'ultima è una combinazione lineare di $v_1, \dots v_n$ che restituisce zero; d'altra parte $v_1, \dots v_n$ sono una base di V, e quindi in particolare sono linearmente indipendenti; allora deve essere $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, quindi in particolare $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

ii. dimostriamo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_k)$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$; abbiamo visto in precedenza che le immagini di un sistema di generatori del dominio formano un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$; nel nostro caso, $v_1, \dots v_n$ è una base di V, quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ è un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$; d'altro canto, $v_1, \dots, v_k \in \ker f$, pertanto $f(v_1) = \dots = f(v_k) = 0$, quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{im} f &= \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)) = \\ &= \operatorname{span}(0, \dots, 0, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)) = \\ &= \operatorname{span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))\end{aligned}$$

pertanto $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ è un sistema di generatori per $\operatorname{im} f$.

Esempio: sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare; allora sicuramente f non può essere suriettiva; infatti, se lo fosse avremmo $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^4$ quindi $\dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}^4 = 4$; d'altro canto, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, quindi per il teorema di dimensione avremmo che

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{im} f}_{4}$$

e questo è impossibile, dato che $\dim \ker f \ge 0$.

Esercizio: dimostrare che un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ non può essere iniettiva.

Oss: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e consideriamo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$; interpretiamo le soluzioni di questo sistema in termini dell'applicazione L_A:

$$\begin{aligned}\{\text{soluzioni di } AX = 0\} &= \{s \in K^n : A \cdot s = 0\} \\ &= \{s \in K^n : L_A(s) = 0\} \\ &= \ker L_A\end{aligned}$$

Cor: sia $A \in M_{m,n}(K)$, allora la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq K^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ è data da $n - \operatorname{rg} A$; infatti vale che $L_A: K^n \to K^m$ e dunque

$$\underbrace{\dim K^n}_{n} = \dim \underbrace{\ker L_A}_{W} + \underbrace{\dim \operatorname{im} L_A}_{\operatorname{rg} A}$$

pertanto $n = \dim W + \operatorname{rg} A$, ovvero $\dim W = n - \operatorname{rg} A$

Oss: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e consideriamo $L_A: K^n \to K^m$; dato $b \in K^m$, interpretiamo cosa significhi che $b \in \operatorname{im} L_A$

$$\begin{aligned}b \in \operatorname{im} L_A &\iff \text{esiste } s \in K^n \text{ tale che } L_A(s) = b \\ &\iff \text{esiste } s \in K^n \text{ tale che } A \cdot s = b \\ &\iff \text{il sistema lineare } AX = b \text{ è compatibile.}\end{aligned}$$

Cor: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e supponiamo che $\dim V = \dim V'$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
1. f è iniettiva
2. f è suriettiva.

Dim: 1. $\Rightarrow$ 2. supponiamo f iniettiva, dimostriamo f suriettiva;
dato che f è iniettiva, allora $\ker f = \{0\}$, pertanto $\dim \ker f = 0$; quindi per il teorema di dimensione

$$\dim V = \underbrace{\dim \ker f}_{=0} + \dim \operatorname{im} f$$

pertanto $\dim \operatorname{im} f = \dim V = \dim V'$, quindi $\operatorname{im} f$ è un sottospazio vettoriale di V' della stessa dimensione di V', pertanto esso deve coincidere con V', ovvero $\operatorname{im} f = V'$, ovvero f è suriettiva.

2. $\Rightarrow$ 1. supponiamo f suriettiva, dimostriamo che f è iniettiva;
dato che f è suriettiva, allora $\operatorname{im} f = V'$, pertanto per il teorema di dimensione

$$\dim V = \dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{im} f}_{= \dim V'}$$

quindi $\dim \ker f = \dim V - \dim V' = 0$, dunque $\dim \ker f = 0$, ovvero $\ker f = \{0\}$, ovvero f è iniettiva.

Cor: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e supponiamo $\dim V = \dim V'$, allora

$$\begin{aligned}f \text{ è iniettiva} &\iff f \text{ è suriettiva} \iff \\ &\iff f \text{ è biiettiva} \iff \\ &\iff f \text{ è invertibile}\end{aligned}$$

Introduciamo ora un modo di associare a una applicazione lineare una matrice.

Def: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{E}$ una base di V'; scriviamo

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad e \quad \mathcal{E} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

definiamo la <u>matrice associata</u> a f <u>rispetto alle basi</u> $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ come la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \in M_{m,n}(K)$ ottenuta nella maniera seguente: per ogni $v_i \in \mathcal{B}$ consideriamo $f(v_i)$ e dunque possiamo scrivere $f(v_i)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{E}$, ovvero

$$f(v_i) = \alpha_{1i} w_1 + \dots + \alpha_{mi} w_m$$

scriviamo tali coefficienti come un vettore colonna, e questo sarà la i-esima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, ovvero

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } f(v_1) \text{ risp. a } \mathcal{E} & \cdots & \text{coordinate di } f(v_n) \text{ risp. a } \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

si verifica che f è lineare; consideriamo come basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^2$, ovvero $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}$; per costruire $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ dobbiamo considerare $f(e_1)$ ed $f(e_2)$ dove $\{e_1, e_2\} = \mathcal{E}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dobbiamo esprimerli rispetto alla base $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}f(e_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(e_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2\end{aligned}$$

pertanto

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio: sia $f: V \to V'$ l'applicazione lineare nulla, ovvero quella che associa a ogni vettore $v \in V$ il vettore $0 \in V'$; allora qualsiasi siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$, vale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero la matrice associata all'applicazione lineare nulla è la matrice nulla.

Esempio: consideriamo $id: V \to V$ l'applicazione identità, ovvero quella che associa a ogni vettore $v \in V$ se stesso, ovvero $id(v) = v$; allora per ogni base $\mathcal{B}$ di V vale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n$$

ovvero la matrice associata all'applicazione identità rispetto alla stessa base sia nel dominio che nel codominio è la matrice unità.

Teorema: sia $f: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $\mathcal{E}$ una base di V'; sia $v \in V$ e supponiamo che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ siano le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$; allora le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ sono date da $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Teorema: siano $f: V \to V'$ e $g: V' \to V''$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia $\mathcal{B}$ una base di V, sia $\mathcal{E}$ una base di V' e sia $\mathcal{D}$ una base di V''; allora possiamo considerare la composta $g \circ f: V \to V''$, che anch'essa è una applicazione lineare, e vale

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$$

Cor: sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ basi di V; allora consideriamo $id: V \to V$, allora

$$\begin{array}{c} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id \circ id) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) \\ \parallel \\ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) \\ \parallel \\ \mathbb{1}_n \end{array}$$

quindi

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = \mathbb{1}_n$$

ovvero, la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id)$ è l'inversa della matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id)$

Prop: siano $f, g: V \to V'$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f + g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(g)$$

qualsiasi siano le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ di, rispettivamente, V e V'; similmente, per ogni $\lambda \in K$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$$