ESERCIZI SU BASI E RANGO
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Calcola il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 12 & 14 \\ 2 & -5 & -6 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 13 & -9 \\ -2 & -1 & -6 & -9 & 11 \\ -1 & 0 & -4 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -8 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -13 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & 9 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Per calcolare il rango di una matrice, è sufficiente applicare l'algoritmo di Gauss per trasformare la matrice in una matrice a scala. Il rango coincide con il numero di pivot.

- Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-9\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+4\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo concludere che

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

- Consideriamo ora la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Possiamo applicare Gauss e procedere come sopra, oppure usiamo la definizione di rango di una matrice: $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}))$ (dimensione dello spazio generato dalle colonne). Valgono le seguenti relazioni tra le colonne di A:

$$A^{(1)} = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

quindi $\operatorname{span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = \operatorname{span}(A^{(1)})$. Siccome $A^{(1)} \neq 0$, allora la dimensione dello span delle colonne è 1, quindi $\operatorname{rg}(A) = 1$.

Esercizio 2

Risolvi, quando possibile, i seguenti sistemi lineari attraverso questa procedura:

(1) **Computa** il rango della matrice delle indeterminate e della matrice completa e **decidi** se il sistema sia compatibile usando il teorema di Rouché-Capelli.

(2) **Computa** una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

(3) **Computa** una soluzione particolare del sistema lineare.

(4) **Descrivi** la generica soluzione del sistema lineare usando il teorema di struttura per sistemi lineari.

$$\begin{cases} x + 6y + 5z = -10 \\ -x - 6y - 4z = 9 \\ -x - 6y - 10z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 10y - 11z = -2 \\ 3x - 5y - 12z = 4 \\ 2x - 8y - 7z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 13z = -11 \\ x + 2y + 7z = -5 \\ x + y + 7z = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y - 5z = 0 \\ -3x + 11y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 3z = -1 \\ x + 5y + 12z = -4 \\ 2x + 4y + 13z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - y - 13z = -18 \\ x - 2z = -3 \\ -2x + 5z = 7 \end{cases}$$

Risoluzione. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+6y+5z &= -10 \\ -x-6y-4z &= 9 \\ -x-6y-10z &= 15 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere nella forma $A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcoliamo il rango della matrice completa $A|b$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & -10 \\ -1 & -6 & -4 & 9 \\ -1 & -6 & -10 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-(-1)\cdot\text{I}]{\text{II}-(-1)\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-(-5)\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = 2$, allora dal teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile.

(2) Per risolvere il sistema lineare omogeneo associato usiamo la matrice a scala che abbiamo computato a partire da A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare associato diventa:

$$\begin{cases} x+6y+5z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} x &= -6y \\ z &= 0 \end{cases}$$

quindi la generica soluzione è della forma $\left(\begin{smallmatrix} -6y \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, da cui deduciamo che lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo è:

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

In questo caso, ogni vettore non nullo appartenente allo span è base del sottospazio.

(3) Per calcolare una soluzione particolare, basta assegnare un valore arbitrario ai parametri liberi e poi risolvere per sostituzione. Ad esempio, scegliendo $y = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x+6y+5z &= -10 \\ z &= -1 \\ y &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} x &= -5 \\ y &= 0 \\ z &= -1 \end{cases}$$

da cui una soluzione particolare del sistema:

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(4) Possiamo scrivere la generica soluzione del sistema lineare come:

$$s = \tilde{s} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Calcola una base di $U \cap W$ dove $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ sono i seguenti sottospazi vettoriali:

(1) $$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 4w + x - y + 5z &= 0 \\ 9w - x - 2y + 8z &= 0 \end{cases} \}$$

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -9w + 2y - 9z &= 0 \\ 9w - 2y + 9z &= 0 \end{cases} \}$$

(2) $$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} 6w + y - 3z &= 0 \\ 14w - x + y - 5z &= 0 \end{cases} \}$$

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -5w + x + y &= 0 \\ 9w + y - 4z &= 0 \end{cases} \}$$

(3) $$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ -2w + y + 4z &= 0 \end{cases} \}$$

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} -x - 2y - 8z &= 0 \\ -w + 3y + 7z &= 0 \end{cases} \}$$

Risoluzione. (1) $U \cap W$ è il sottospazio dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 4w + x - y + 5z &= 0 \\ 9w - x - 2y + 8z &= 0 \\ -9w + 2y - 9z &= 0 \\ 9w - 2y + 9z &= 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & -2 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & -2 & 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}=-\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 2 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{3} & -\frac{53}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{3} & -\frac{53}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{53}\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la matrice A ha rango 3, quindi lo spazio delle soluzioni (ovvero $U \cap W$) avrà dimensione $4 - 3 = 1$. Il sistema omogeneo diventa:

$$\begin{cases} x - y + 5z + 4w &= 0 \\ y - \frac{13}{3}z - \frac{13}{3}w &= 0 \\ z + w &= 0 \end{cases}$$

dove w è il parametro libero. Procediamo a risolvere per sostituzione:

$$\begin{cases} x - y + 5z + 4w &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= -w \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x &= -5(-w) - 4w = w \\ y &= 0 \\ z &= -w \end{cases}$$

Possiamo concludere che:

$$U \cap W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$