Oss: se $f: V \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare tra spazi di dimensione finita ed f è biettiva (ovvero invertibile), dunque $f^{-1}: V \longrightarrow V$ è lineare e vale che, se $\mathcal{B}$ è una base di V, allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) =$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \mathbb{1}_n$$

quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile e la sua inversa è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$, ovvero

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

Ricordiamo che, se $f: V \longrightarrow V'$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, allora se $\mathcal{B}$ è una base di V e $\mathcal{B}'$ è una base di V' e $v \in V$ e $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, allora le coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ sono $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Consideriamo questo risultato generale nel caso specifico in cui $V' = V$ e $f = id_V$. Otteniamo che, se $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $id_V(v) = v$ rispetto a $\mathcal{B}'$. In questo senso, la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$ è una matrice di cambio di base.

Esempio: consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e consideriamo $id_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; scriviamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^2})$

scriviamo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$

$$id_V(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(w_2 - w_1) = -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

$$id_V(v_2) = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

pertanto, se $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, allora $v = v_1 + 3v_2$, quindi le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, pertanto le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}'$ sono

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da tutti questi risultati deriviamo che, se

$$f: V \longrightarrow V'$$

è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e

$\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ sono basi di V

$\mathcal{E}$ e $\tilde{\mathcal{E}}$ sono basi di V'

allora

$$M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(f) = M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(id_{V'} \circ f \circ id_V)$$

$$= \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(id_{V'})}_{\text{cambio di base}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot \underbrace{M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}}(id_V)}_{\text{cambio di base}}$$

Pertanto, se conosciamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, possiamo ottenere $M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{E}}}(f)$ moltiplicando a destra e a sinistra $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$ per matrici di cambio di base.

In particolare, se dominio e codominio coincidono, ovvero se consideriamo $f: V \longrightarrow V$ e se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due basi di V, allora

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(id_V \circ f \circ id_V) =$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

Ora, se scriviamo $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)\right)^{-1}$ ovvero $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = P^{-1}$, quindi la relazione precedente diventa

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

Def: due matrici quadrate $A, B \in M_n(K)$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(K)$ tale che

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Possiamo riassumere quanto visto finora dicendo che se $f: V \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di V, allora le due matrici associate $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ sono tra loro simili e vale la relazione

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

dove $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$. Questo consente di determinare la matrice associata a una applicazione lineare rispetto a basi diverse. Un problema che ci porremo sarà quello di trovare una base rispetto alla quale la matrice associata a un'applicazione lineare sia "la più semplice possibile".

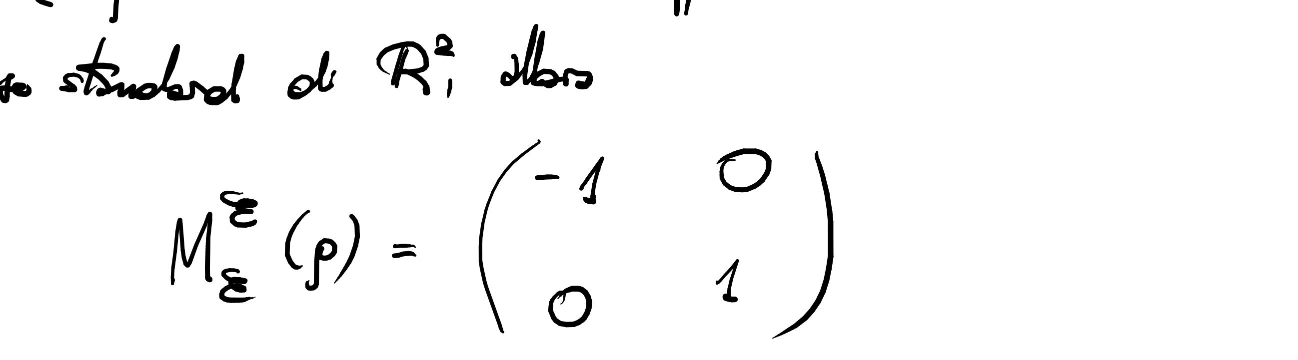
Concludiamo questa parte menzionando il fatto che se V è uno spazio vettoriale di dimensione n finita, allora

$$\begin{array}{ccc} \{\text{applicazioni lineari da } V \text{ in } V\} & \longrightarrow & M_n(K) \\ \ni & & \\ f & \longmapsto & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

Si verifica che questa associazione è biettiva.

Diagonalizzazione

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto all'asse delle ordinate:

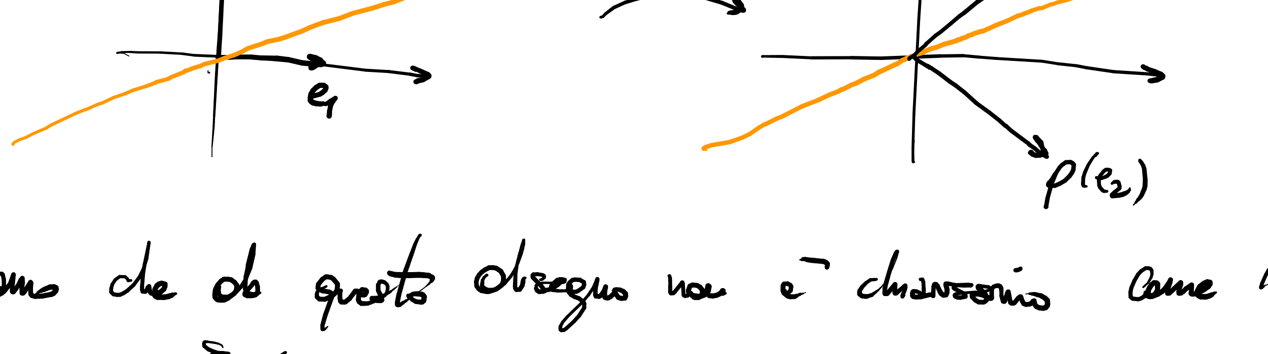


La riflessione $\rho: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un'applicazione lineare e se $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^2$, allora

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

perché $\rho(e_1) = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$ e $\rho(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$

Se ora consideriamo una retta ℓ in $\mathbb{R}^2$ e consideriamo la riflessione ρ_ℓ rispetto ad ℓ, allora



Vediamo che da questo disegno non è chiarissimo come intervenire come sia fatta $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho_\ell)$