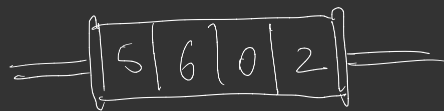
Lezione 2

0.4. Combinatorica [o ri-imparare a contare].

D:  Quante possibilità ci sono per aprire il lucchetto?

$\cancel{4!}$ $\quad \cancel{4^{10}}$ $\quad 10^4$ ✓ ....

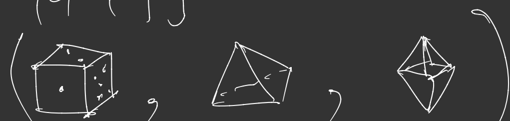
$\underbrace{(0,1,2,\dots,9)}_{10 \text{ POSSIBILITÀ}}$ CIFRE DISPONIBILI

- Le ghiere sono indipendenti fra loro.
- La prima ghiera la posso scegliere in 10 modi diversi. (10)
- La seconda " " " " " " " (10)
- La terza " (10)
- La quarta " (10)

La soluzione è: $10 \times 10 \times 10 \times 10 =: 10^4 = 10\,000$ possibilità

0000
0001
0002
⋮
0009
⋮
9999

$\Big\}$ 9999 possibilità + la zeresima $= 10\,000$

Esempio: 

$1, \dots, 6 \qquad 1, \dots, 4 \qquad 1, \dots, 8$

quante possibilità ci sono?

$6 \times 4 \times 8 = \dots$

In generale abbiamo calcolato il numero di

$\boxed{\text{DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE:}}$ k oggetti, il primo ha n_1 possibilità, il secondo n_2 possibilità,

..., il k-esimo ha n_k possibilità.

$\Rightarrow$ il numero di risultati possibili è $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

In particolare, se tutti gli oggetti hanno n possibilità [cioè $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$], allora abbiamo n^k possibilità:

$$D^{rip.}_{n,k} = n^k$$

[prima $n = 10$, $k = 4$ nel caso del lucchetto]

Esempio: vogliamo calcolare quanti possibili segmenti del DNA posso avere con lunghezza 6 lettere

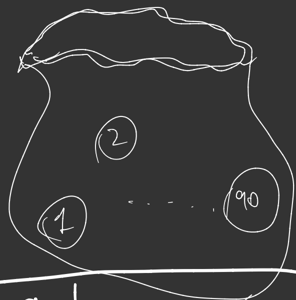
a = adenina
c = citosina
g = guanina
t = timina

$\boxed{a\,a\,g\,t\,c\,a}$ ← per esempio.

Quante possibilità? $4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE

[Disposizioni = l'ordine conta]



$$(5, 17, 3, 90, 87, 3)$$

Quante possibilità ci sono?

$$\boxed{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85} = \frac{90!}{84!}$$

$$(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720)$$

$$\boxed{\frac{90!}{84!\,6!} = \text{COMBINAZIONI SENZA RIPET. [a meno dell'ordine]}}$$

In generale, se contiamo le disposizioni di k oggetti con n scelte abbiamo

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \text{ possibilità.}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)\cancel{\overbrace{(n-k)(n-k-1)\dots1}^{=(n-k)!}}}{\cancel{(n-k)!}}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ (Fattoriale) $n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$0! = 1$ (per convenzione)

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 120$

$6! = 720 \ldots$

Fin'ora abbiamo guardato le DISPOSIZIONI [= l'ordine conta]

D: Quante possibilità ci sono a meno dell'ordine?

R: Quelle di prima DIVISO i modi per riordinarle.

Prima $(1, 2)$ e $(2, 1)$ erano diverse [nelle DISPOSIZIONI]

Ora $(1, 2) = (2, 1)$ [nelle COMBINAZIONI]

Le combinazioni senza ripetizioni sono:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{\underbrace{\left(\text{il numero di modi di riordinare le } k \text{ scelte}\right)}_{k!=}}}$$

1 2 .... k D: in quanti modi le posso riordinare?

3 5 k ... 1

5 1 ...... • R: ho k! modi di riordinarle.

k modi (k-1) modi 1 modo

Ex: ordina 3 carte in tutti i modi possibili.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{array}\right\} 6 \text{ possibilità}$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

<u>Conclusione</u>: ci sono $k!$ modi di mescolare k oggetti.

Combinazioni senza ripetizione sono:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

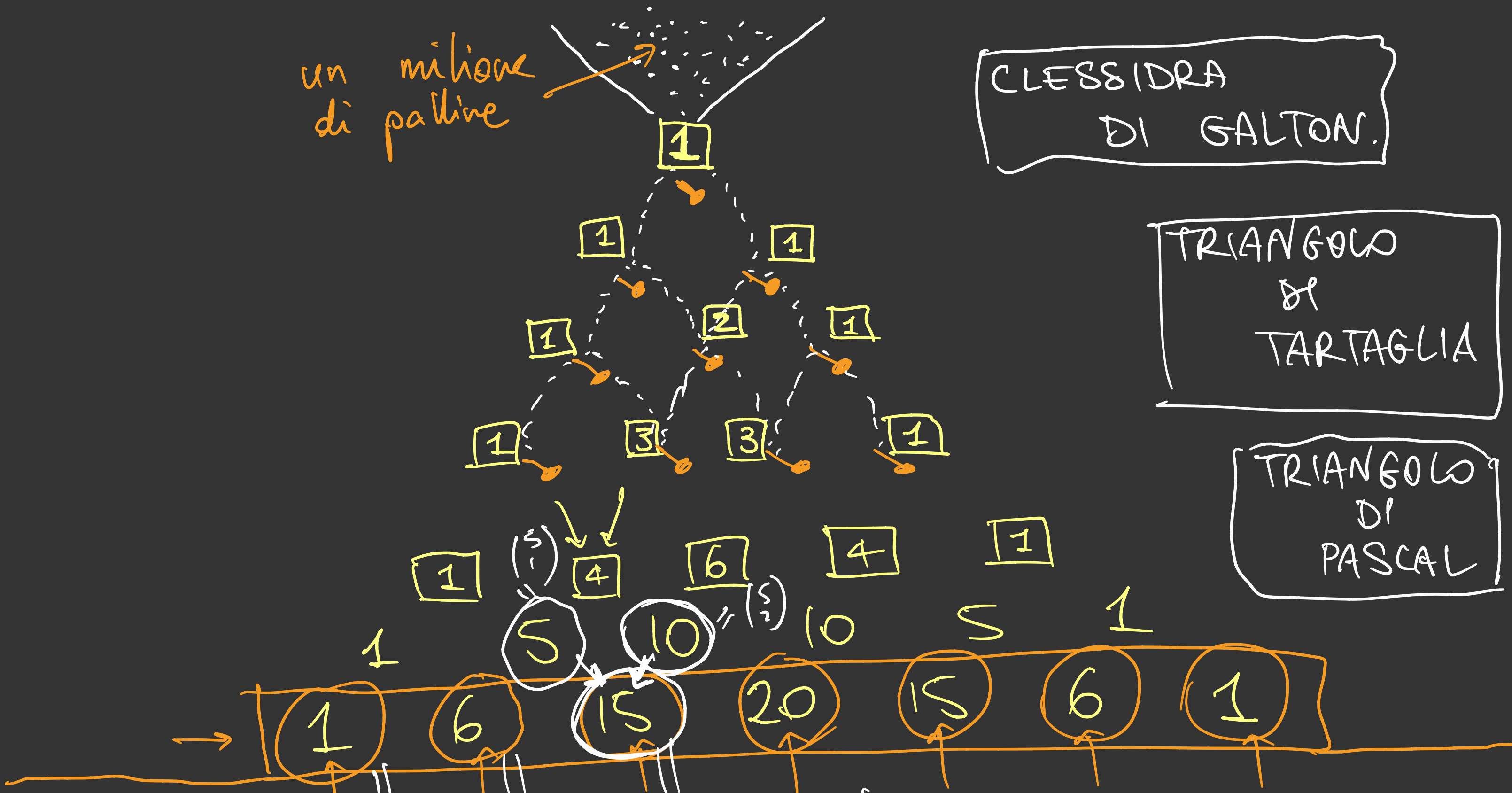
COEFFIC. BINOMIALE

SI LEGGE "n su k".

CLESSIDRA DI GALTON.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

TRIANGOLO DI PASCAL



$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{2\cdot1\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$$

ESEMPIO DI IDENTITÀ DEI BINOMIALI

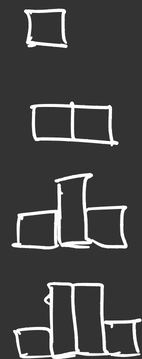
$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Esercizio: Graficare le righe del triangolo di Tartaglia



$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$\vdots$	

Comincia a intravedersi una forma continua... ci sarà utile nella Parte III del corso.

Esercizio:

Calcolare il numero di combinazioni con ripetizioni [= a meno dell'ordine]

$$\boxed{C^{rip}_{n,k} = ?}$$

e trovare una dimostrazione.

	Disposizioni	Combinazioni
senza ripetizioni	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$
con ripetizioni	$D^{rip}_{n,k} = n^k$	$C^{rip}_{n,k} = ?$