Lezione 3

	disposizioni [l'ordine conta]	combinazioni [l'ordine non conta]
senza ripetizioni	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$
con ripetizioni	$D^{rip}_{n,k} = n^{k}$	$C^{rip}_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$

Esempi:

- $D_{n,k}$

Quante parole [anche senza senso] possiamo scrivere di 4 lettere, nell'alfabeto italiano?
DISTINTE!

$$D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{21!}{17!}$$

- $D^{rip}_{n,k}$

Lucchetto [. | . | . | .]
0
⋮
9

$$D^{rip}_{10,4} = 10^4$$

= quante disposizioni del lucchetto ci sono.

- $C_{n,k} = \binom{n}{k}$

3 carte di picche. In quanti modi le posso prendere?

$$C_{13,3} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!\,10!} = \frac{13 \cdot \overset{2}{\cancel{12}} \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = 13 \cdot 22 = 286$$

- $C^{r'p}_{n,k} = \binom{n-1+k}{k}$

Ho due dadi da 6 facce. sono indistinguibili
[non conta l'ordine!]

Quante combinazioni ci sono?

$(1,1)$

$(1,2)\ (2,2)\ \cancel{(2,1)}$

$(1,3)$

$\vdots$

$(1,6)\ \dots\dots\dots\ (6,6)$

$n=6, \quad k=2$

$$C^{r'p}_{6,2} = \binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!}$$

$$= \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = \frac{42}{2} = 21. \checkmark$$

E per dadi distinguibili? [uno rosso, uno blu]?

$$D^{r/p}_{6,2} = 6^2 = 36.$$

D: A insieme di n elementi.
Quanti sottoinsiemi ci sono? [conta anche ϕ, A]

$\underline{n=1}$ $A=\{a\}$: ϕ, A sono 2.

$\underline{n=2}$ $A=\{a,b\}$: $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$ sono 4.

$\underline{n=3}$ $A=\{a,b,c\}$: $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$ sono 8

suggerisce il guess 2^n.

FORMULA PER LA CARDINALITA' DELL' INSIEME DELLE PARTI
[l'insieme dei sottoinsiemi]

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^n}$$

Dimostrazione: per ogni elemento o lo includiamo o non lo includiamo nel sottoinsieme.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\;\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\quad\cdots\quad\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} = 2^n.$$

Dimostrazione 2: fisso la cardinalità del sottoinsieme e dico che è k.

$\Longrightarrow$ i sottoinsiemi di cardinalità k sono $\binom{n}{k} = C_{n,k}$

la risposta è
$$\underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}}_{= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}}$$

$\binom{n}{0} = 1$ rappresenta $\emptyset$

$\binom{n}{2}$ rappresenta sottoinsiemi di 2 elementi.

$\binom{n}{n} = 1$ rappresenta A

Teorema di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} \cancel{a^0} b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^n$$

Come possiamo usare il teorema di Newton?

La risposta è $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ con } a=b=1$$

$$= (a+b)^n \text{ con } a=b=1$$

$$= (1+1)^n = 2^n \quad \checkmark$$

triangolo di Tartaglia

Sono coeff. binomiali

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \underline{20} & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + \underline{10}x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + y^5$$

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

Quante volte avremo il termine $x^3 y^2$? $\binom{5}{2}$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 5 \cdot 2 = \underline{10}$$