

## Lezione 3

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$\quad\quad\quad\downarrow$$
$$\quad\quad\quad= \binom{n}{k}$$

senza  
ripetizioni

$$D_{n,k}^{\text{rip}} = n^k$$
$$C_{n,k}^{\text{rip}} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-r)!}$$
$$\quad\quad\quad\downarrow$$
$$\quad\quad\quad= \binom{n+k-1}{k}$$

con  
ripetizioni

disposizioni  
[l'ordine conta]

combinazioni  
[l'ordine non conta]

Esempio:

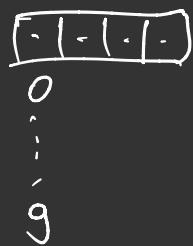
- $D_{n,k}$

Quante parole [anche senza senso] possiamo scrivere di 4 lettere nell'alfabeto italiano? DISTINTE!

$$D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{21!}{17!}$$

- $D_{n,k}^{\text{rip}}$

Lucchetto



$$D_{10,4}^{\text{rip}} = 10^4$$

↓  
= quante disposizioni  
del lucchetto  
ci sono.

- $C_{n,k}^{\text{"}} \binom{n}{k}$

3 carte di picche. In quanti modi le posso prendere?

$$C_{13,3} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 22 \stackrel{↓}{=} 286$$

$$\bullet C_{n,k}^{np} = \binom{n-1+k}{k}$$

Ho due dadi da 6 facce. sono indistinguibili  
[non conta l'ordine!]

Quante combinazioni ci sono?

(1,1)

(1,2) (2,1) ~~(2,2)~~

(1,3)

⋮

(1,6)

(6,6)

$$n=6, \quad k=2$$

$$C_{6,2}^{np} = \binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21. \quad \checkmark$$

E per dadi distinguibili? [uno rosso, uno blu]?

$$D_{6,2}^{\text{np}} = 6^2 = 36.$$

D: A insieme di  $n$  elementi.  
Questi sottoinsiemi ci sono? [conta anche  $\emptyset$ ]

$$\underline{n=1} \quad A = \{a\} : \emptyset, A \text{ sono } 2.$$

$$\underline{n=2} \quad A = \{a, b\} : \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \text{ sono } 4.$$

$$\underline{n=3} \quad A = \{a, b, c\} : \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \text{ sono } 8$$

Suggerisce il guess  $2^n$ .

FORMULA PER LA CARDINALITÀ  
DELL' INSIEME DELLE PARTI  
[l'insieme dei sottinsiemi]

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^n}$$

Dimostrazione: per ogni elemento o lo includiamo o non lo includiamo nel sottinsieme.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

0	0
1	1

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = 2^n.$$

Dimostrazione 2: fisso la cardinalità del sottinsieme e dico che è  $k$ .

$\Rightarrow$  i sottoinsiemi di cardinalità  $k$  sono  $\binom{n}{k}$   
 la risposta è  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$   $C_{n,n}$   
 rappresenta  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  rappresenta  
 $\phi$  sottoinsieme  
di 2 elementi.

Teorema di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Come possiamo usare il teorema di Newton?

La risposta è

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ con } a=b=1$$

$$= (a+b)^n \text{ con } a=b=1$$

$$= (1+1)^n = 2^n \quad \checkmark$$

triangolo di Tartaglia

Sono coeff. binomiali →

	1	1	1	
	1	2	1	
	1	3	3	1
	1	4	6	4
	1	5	10	10

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + \underline{10x^3y^2} + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

Quante volte avremo il termine  $x^3 y^2$ ?  $\binom{5}{2}$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 5 \cdot 2 = \underline{\underline{10}}$$