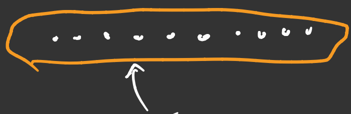
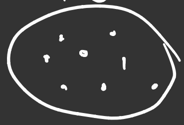
Lezione 12

Parte III: Probabilità continua.

CONTINUITÀ $\longleftrightarrow$ DISCRETO $\supset$ FINITO

può essere infinito MA i punti sono abbastanza distanti:

$D \subset \mathbb{R}$ discreto $\overset{DEF}{\iff} \exists \varepsilon > 0 :$
$\forall a \neq b, \; |a-b| \geq \varepsilon .$

Cioè "i punti non possono essere vicini a piacere"

Es: $\mathbb{N}$ è discreto
$\mathbb{Z}$ è discreto
$\mathbb{Q}$ NON è discreto
$\mathbb{R}$ non è discreto

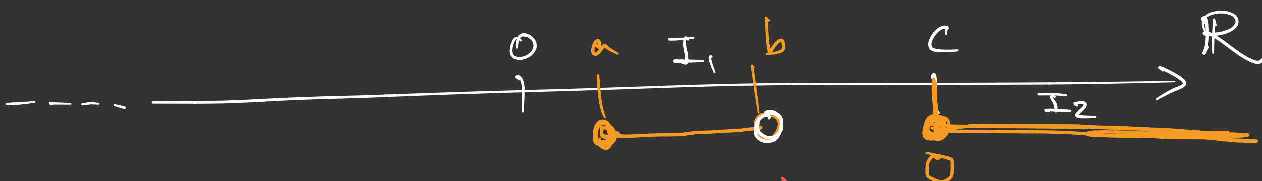
$\boxed{\text{DEF}}$ (VARIABILE ALEATORIA) (a valori reali)

$$\underset{\text{insieme dei campioni}}{X : \Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

[assumiamo di poter calcolare $\mathbb{P}$ di ogni elemento di $\underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{insieme degli eventi}}$]

Ci interessa considerare:

1) INTERVALLI (aperti o chiusi)
2) SEMIRETTE (aperte o chiuse)



$\mathbb{P}(X^{-1}(I_1)) =: \mathbb{P}(\{a \le X \lneq b\})$ lo penso come un evento

$\mathbb{P}(X^{-1}(I_2)) =: \mathbb{P}(\{X \ge c\})$

$\boxed{\text{DEF}}$ (VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI)

$$X_1, X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

stesso dominio (insieme dei campioni)

Sono indip. $\overset{\text{DEF}}{\iff}$ gli eventi $\{X_1 \in I_1\}, \{X_2 \in I_2\}$ sono indipendenti $\forall (I_1, I_2)$.

$\boxed{\text{DEF}}$ MEDIA
VALORE ATTESO
SPERANZA MATEMATICA
EXPECTED VALUE
VALOR MEDIO

di una variabile aleatoria X

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) =: \mu_X$$

che è discreto

Es: Dado a sei facce

X = valore del lancio.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

(finito $\Rightarrow$ discreto
$\Downarrow$
la somma sarà finita)

$X : \{1, \dots, 6\} \xrightarrow{id} \mathbb{R}$

$i \longmapsto i$

$$3{,}5 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 1 + \left(\frac{1}{6}\right)\cdot 2 + \dots + \left(\frac{1}{6}\right) 6}_{/\!/}$$

$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = i)}_{= \frac{1}{6}}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ $$\mathrm{Var}[X] := \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2 =: \sigma_X^2$$

stiamo dicendo che

$\boxed{\text{DEF}}$ $$\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

adesso di una variabile aleatoria! $\longrightarrow$ DEVIAZIONE STANDARD

Quantità interessanti per ogni modello sono proprio queste:

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ X \\ \cdot\ \Omega \\ \cdot\ \mathbb{P} \end{array}\right]$ modello

Allora voglio calcolare: $\left\{\begin{array}{l} \cdot\ \mathbb{E}[X] \\ \cdot\ \mathrm{Var}[X] \\ \cdot\ \sigma_X \end{array}\right.$

$\boxed{\S \text{III}.1.}$ DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI o BINOMIALE

Lancio una moneta truccata:

$\left.\begin{array}{l} \text{esce testa con prob.} = p \\ \text{esce croce con prob.} = q \end{array}\right\}$ $p+q=1 \Rightarrow q=1-p.$

Es: la nuova generaz. $\left\langle\begin{array}{l} \text{maschio con prob. } p. \\ \text{femmina } \;'' \;\; '' \;\; 1-p. \end{array}\right]$

D: Qual è la probabilità che escano k teste su n lanci? [k maschi su n figli?]

X := # volte in cui è uscita testa su n lanci (# maschi su n figli)

$$\mathbb{P}(X=k) = \underset{\geq 0}{\underline{\binom{n}{k}}} \cdot \underset{\geq 0}{\underline{p^k}} \cdot \underset{\geq 0}{\underline{(1-p)^{n-k}}}$$

$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$

→ T T C C T C C C C T ✓ $k=4$, $n=10$

→ T C T C T C C C C T ✓

LOGICA: [Definiamo un X ⇝ Ω] ⇝ [$\mathbb{P}(X = x_i)$ $\forall x_i \in X(\Omega)$] ⟶ $\begin{cases} \mathbb{E}[X] \\ Var[X] \\ G_X \end{cases}$

$\{0, \dots, n\}$

<u>Check</u>: è davvero una probabilità?

- Es: $\mathbb{P}(X=k) \in [0,1]$ ✓ perché $\mathbb{P}(X=k) \geq 0$.
- Es: $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$ ✓

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{p}_{=a}^{k} \underbrace{(1-p)}_{=b}^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$

$(a+b)^n$

✓ normalizzata bene.

$\Omega = \{0, \ldots, n\}$

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X=k) =$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \frac{\cancel{n!}\,(n-1)!\,\cancel{k}}{\cancel{k!}_{(k-1)!}(n-k)!} p^k (1-p)^{\underset{n-k}{(n-1)-(k-1)}}$$

NUOVO INDICE

$t := k-1$

$$= np \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} p^{t} (1-p)^{n-1-t} = n \cdot p \cdot \underbrace{(p + (1-p))^{n-1}}_{=1}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = n \cdot p$$

$$Var[X] := \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_i)(x_i - \mathbb{E}[X])^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underbrace{(k-np)^2}_{= k^2 + n^2p^2 - 2knp}$$

separate tutto in 3 termini

risommate con Newton ogni termine

ottenete il risultato

$$= \boxed{np(1-p)}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \boxed{\sqrt{np(1-p)}}$$