Lezione 8 novembre 2024

venerdì 8 novembre 2024 11:06

Visto: Sist. lineari di ipersup.

$$\Lambda = \mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^{N(d,n)}, \quad N(d,n) = \binom{n+d}{d} - 1$$

$U \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$
SSV

Se $\dim U = \varrho + 1$, $\dim \Lambda = \varrho$

$\boxed{n=2}$

Esempi di condizioni lineari: – passaggio per un punto A: 1 condizione lineare

– avere una singolarità in un punto assegnato Q: 3 condizioni lineari (si devono annullare le tre derivate parziali)

Consideriamo ora la CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER UN PUNTO CON TANGENTE ASSEGNATA

Cioè: cerchiamo polinomi $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ tali che $F(Q) = 0$ e $I_Q(L, Z_p(F)) \geq 2$ per una retta fissata L.

Nel caso in cui Q sarà liscio per $Z_p(F)$, si avrà $\tau_Q Z_p(F) = L$.

Passaggio per Q : $F(Q) = 0$ 1 condizione lineare $\left(F = \sum c_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}, \ \sum c_{i_0 i_1 i_2} \varrho_0^{i_0} \varrho_1^{i_1} \varrho_2^{i_2} = 0\right)$

$I_Q(L, Z_p(F)) \geq 2 \iff$ scelto un punto $R \in L$, $R \neq Q$, si ha
usando le formule di Taylor

se $R = (r_0 : r_1 : r_2)$:

$$\partial_{x_0} F(Q) \cdot r_0 + \partial_{x_1} F(Q) \cdot r_1 + \partial_{x_2} F(Q) \cdot r_2 = 0$$

$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (**)$$

è cond. lineare nei coeff. di F

$$\left(\sum_{i_0 \geq 1} c_{i_0 i_1 i_2} \cdot i_0 \cdot \varrho_0^{(i_0 - 1)} \cdot \varrho_1^{i_1} \cdot \varrho_2^{i_2}\right) \cdot r_0 + \dots$$

$\Rightarrow$ il passaggio per Q con tangente assegnata L corrisponde a 2 condizioni lineari

$$\begin{cases} F(Q) = 0 \\ {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}, \quad L = \overline{QR}$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{codim} \Lambda = 2$

$$\dim \Lambda = N(d, 2) - 2$$

Osserviamo che in Λ ci sono anche tutte le curve che sono singolari in Q.

Es: $d = 2$

$Q = (1:0:0)$ $x_2 = 0$

$$F = c_{011} x_1 x_2 + c_{101} x_0 x_2 + \cancel{c_{110} x_0 x_1} + c_{002} x_2^2 + c_{020} x_1^2 + \cancel{c_{200} x_0^2}$$

$${}^aF = c_{011} xy + c_{101} y + c_{002} y^2 + c_{020} x^2 = c_{101} y + c_{020} x^2 + c_{011} xy + c_{002} y^2$$

$F(1,0,0) = 0 \iff \boxed{c_{200} = 0}$

$R = (0:1:0) \in Z_p(x_2)$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} c_{101} x_2 + c_{110} x_1 \\ c_{011} x_2 + c_{110} x_0 + 2 c_{020} x_1 \\ c_{011} x_1 + c_{101} x_0 + 2 c_{020} x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(Q) = \nabla F(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{110} \\ c_{101} \end{pmatrix}$$

$${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{c_{110} = 0}$$

Pb: Cons. r punti $Q_1, \dots, Q_r$ e il passaggio per Q_i; sono r condiz. lineari; potrebbero essere LIN. DIP e allora si avrebbe $\dim \Lambda > N(d,2) - r$

OSS.: r condiz. sono LIN. DIP. $\iff$ una eq. può essere scritta come comb. lineare delle altre

$\iff$ tale eq. è automatic. soddisfatta dalle impos. di pass. per altri $r-1$ punti

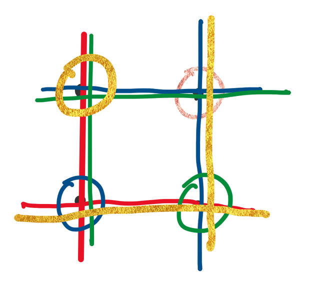
$\iff$ ci sono $r-1$ punti tali che se una curva di grado d passa per essi, allora passa automaticamente per l'r-esimo punto.

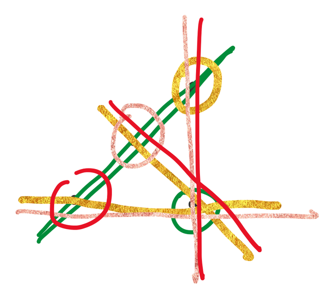
PROP.: Il pass. per r punti del piano impone r cond. LIN. INDIP. $\iff$

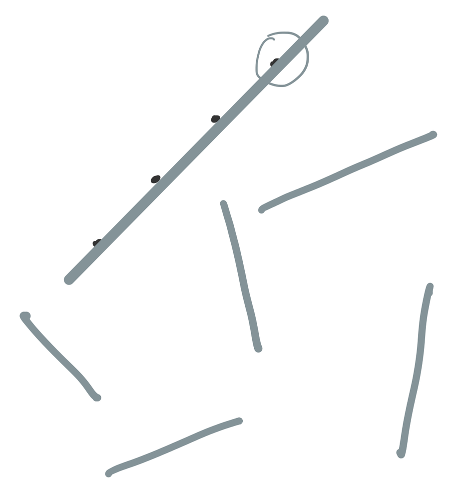
$\forall\, Q_i \in \{Q_1, \dots, Q_r\}$, $\exists$ una curva di grado d $Z_p(F)$ t.c. $\begin{cases} F(Q_j) = 0 & j \neq i \\ F(Q_i) \neq 0 \end{cases}$

Esempio $d = 2$

$r = 4$







$\dim \Lambda = N(2,2) - 4 = 5 - 4 = 1$

è fascio

$\dim \Lambda = 1$

3 cond. indip.

$\dim \Lambda = 5 - 3 = 2$
RETE di coniche