# Lezione 5 novembre 2024

martedì 5 novembre 2024 17:00

$$\dim K[x_0, x_1, x_2]_d = \binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)!}{2!\,d!} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

base tutti i monomi monici di grado d

$x_0^{i_0}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}$ $\quad 0 \le i_j \le d$

$i_0 + i_1 + i_2 = d$

Per induzione su d : $d = 1$ : $x_0, x_1, x_2$

$\dim K[x_0, x_1, x_2]_1 = 3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}$ ✓

Supp. vera per $d-1$

es.: $d = 3$

$d-1 = 2$ : $x_0^2 \quad x_0 x_1 \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_2^2$

tutti i monomi di grado 3 che contengono $x_0$ : $x_0 \cdot x_0^2 \quad x_0^2 x_1 \quad x_0 x_1^2 \quad x_0 x_1 x_2 \quad x_0 x_2^2$ · 6

monomi che non cont. $x_0$ e contengono $x_1$ : $x_1^3 \quad x_1^2 x_2 \quad x_1 x_2^2$ · 3

$\underline{x_1 \cdot x_1^2 \quad x_1 \cdot x_1 x_2 \quad x_1 \cdot x_2^2}$

monomi che non cont. $x_0$ né $x_1$ : $x_2^3$ · 1

10

$d = 3$ : $\frac{(d+1)(d+2)}{2} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

OSS.: $\dim K[x_1, x_2]_n = n+1$

$x_1^n \quad x_1^{n-1} x_2 \quad x_1^{n-2} x_2^2 \quad \dots \quad x_1 x_2^{n-1} \quad x_2^n$

Supp. $\dim K[x_0, x_1, x_2]_{d-1} = \binom{d-1+2}{2}$

una base per $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ è data da:

$x_0 \cdot$ tutti i monomi di grado $d-1$

$x_1 \cdot$ tutti i monomi in $x_1, x_2$ di grado $d-1$

$x_2^d$

cioè: $\binom{d-1+2}{2} + (d-1+1) + 1$

$$= \binom{d+1}{2} + d + 1$$

$$= \frac{d\,(d+1)}{2} + (d+1) = (d+1)\left(\frac{(d+2)}{2}\right)$$

Es.: $d = 4$: $\frac{(d+1)(d+2)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

**Prop.**: $\dim \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]_d = \binom{d+n}{n}$

$= \#$ disposizioni di $n+1$ elementi con ripetizioni

* * *

OSSERVAZIONE: Formula di Taylor

ha senso ed è vera $\forall$ campo $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ campo dei razionali. In partic. $\operatorname{ch} \mathbb{K} = 0$.

Noi cons. sempre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Le nozioni di punto singolare e punto non singolare, iperpiano tg in un punto nonsingolare, cono tg in un punto singolare si generalizzano in modo analogo a IPERSUP. PROIETTIVE di $\mathbb{P}^n$:

$X = (Z_p(F), F)$, $F \in K[x_0, \dots, x_n]_d$

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ IPERS. ALG.

$Q$ è SING $\iff$ $\forall L \ni Q$ retta si ha

$$I_Q(Z_p(F), L) \geq 2$$

Si ottiene che:

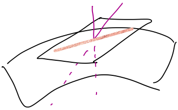
$$Q \text{ è sing. per } Z_p(F) \iff \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $Q$ è non-sing: IPERPIANO TG :

$$^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{T}_Q X : \partial_{x_0} F(Q) \cdot x_0 + \partial_{x_1} F(Q) \cdot x_1 + \dots + \partial_{x_n} F(Q) \cdot x_n = 0$$

Si può verificare che $\mathcal{T}_Q X$ è unione di tutte le rette passanti per $Q$, che hanno molt. di int. $\geq 2$.



$Q$ è singolare di molteplicità $m$

$\iff$

$Q$ annulla TUTTE le derivate

parziali $(m-1)$ - esime di $F$

Def.: $Q$ sing. di molt. $m$,

CONO TG in $Q$ $\mathcal{C}\mathcal{T}_Q X$ è

il luogo

$$\sum_{\substack{0\le i_0, i_1, \dots, i_n \le m \\ i_0+i_1+\dots+i_n=m}} \partial_{x_0^{i_0} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}} F(Q)\cdot x_0^{i_0} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} = 0$$

DIFFERENZA SOSTANZIALE:

Visto: $F = F(x_0, x_1, x_2)$ RIDOTTO

$\Longrightarrow \# \operatorname{Sing} Z_p(F) < +\infty$

Se invece: $F = F(x_0, x_1, x_2, x_3)$, RIDOTTO

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^3$ ed è SUPERFICIE

$$\operatorname{Sing} X = Z_p(\partial_{x_0}F) \cap Z_p(\partial_{x_1}F) \cap Z_p(\partial_{x_2}F) \cap Z_p(\partial_{x_3}F)$$

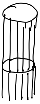
$X = (Z_p(F), F)$ Può essere vuoto, # finito di punti, curve in $\mathbb{P}^3$, o anche curve o punti

Cono tangente: è unione di rette per $Q$
$\mathcal{C}\mathcal{T}_Q X$
che hanno $I_Q(X, L) \geq m+1$.

Es: Cono quadrico in $\mathbb{P}^3$:

cons. cilindro

$x^2+y^2-1=0$ in $\mathbb{A}^3$



$x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$ in $\mathbb{P}^3$

$F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2-x_0^2$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \quad Q = (0:0:0:1)$

Cono tg in Q

$$H_F = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cono tg: $(-2)\cdot x_0^2 + 2\cdot x_1^2 + 2\cdot x_2^2 = 0 \;/:2$

$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ che è eq. di partenza.

Ombrello di Whitney:

$$x^2 - y^2 \cdot z = 0$$

$$x_0 x_1^2 - x_2^2 \cdot x_3 = 0$$

$\nabla F = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_0x_1 \\ -2x_2x_3 \\ -x_2^2 \end{pmatrix}$ ; cons. $Q = (1:0:0:0)$

$$H_F(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$H_F(1,0,0,0) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow Q = (1:0:0:0)$ è doppio

cono tg: $2 \cdot x_1^2 = 0$

$x_1^2 = 0$ PIANO DOPPIO

invece se $Q = (1:0:0:1)$

$CT_Q X \; : \; 2x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \;/:2$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

$(x - y)(x + y) = 0$