Lezione 12 novembre 2024

martedì 12 novembre 2024 16:38

Visto: Λ sistema lineare; condizioni lineari

Def: Sia Λ un SIST. LIN. di curve piane proiettive.

Il **LUOGO BASE** di Λ

$$Bs(\Lambda) := \{ Q \in \mathbb{P}^2 : Q \in Z_p(F) \ \forall [F] \in \Lambda \}$$

oss.: Se $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, \dots, F_s))$

allora $Q \in Bs(\Lambda) \iff Q \in Z_p(F_0) \cap Z_p(F_1) \cap \dots \cap Z_p(F_s)$

Infatti: $\Leftarrow$: Supponiamo
$$\begin{cases} F_0(Q) = 0 \\ F_1(Q) = 0 \\ \vdots \\ F_s(Q) = 0 \end{cases}$$

Se $[F] \in \Lambda$, $F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_s F_s$

$$F(Q) = \underbrace{\lambda_0 F_0(Q) + \lambda_1 F_1(Q) + \dots + \lambda_s F_s(Q)}_{= 0} \implies Q \in Bs(\Lambda)$$

Viceversa: Se $Q \in Bs(\Lambda) \implies F(Q) = 0 \quad \forall [F] \in \Lambda$

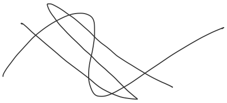
$\implies$ in particolare, $F_0(Q) = F_1(Q) = \dots = F_s(Q) = 0$

OSS.:

Se $\dim \Lambda = 1$, cioè $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, F_1))$

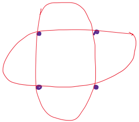
se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, si ha $Bs(\Lambda) \neq \emptyset$; infatti

$Bs(\Lambda) = Z_p(F_0) \cap Z_p(F_1)$



Esempio delle coniche

①



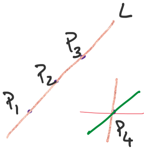
pess. per 4 punti : 4 cond. lineari indip

$\dim \Lambda = 5 - 4 = 1$

$N(2,2)$

$\Rightarrow Bs(\Lambda) =$ 4 punti iniziali

②

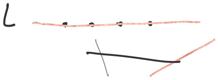


pess. per 4 punti: 4 cond.
LIN INDIP

$\dim \Lambda = 5 - 4 = 1$

$Bs(\Lambda) = L \cup \{P_4\}$

③

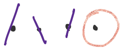


pess. per 4 punti allineati
3 cond. indip.

$\dim \Lambda = 2$

$Bs(\Lambda) = L$

Cons. ora le cubiche piane: $d = 3$



pess. per 4 punti
impongono cond. indipendenti

Esempio: 9 punti in $\mathbb{P}^2$; $d = 3$:

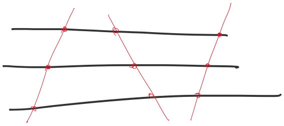
se impongono condizioni indipendenti,

$\dim \Lambda = N(3,2) - 9 = 9 - 9 = 0$

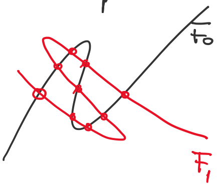
$N(3,2) = \frac{d(d+3)}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

$\dim \Lambda = 0$, cioè è un punto, cioè $\exists !$ cubica per 9 punti che impongono condizioni indipendenti.

Cons. invece 9 punti che siano punti di intersezione di 2 cubiche senza comp. comuni



opp.



Questi 9 punti appartengono ad almeno 2 cubiche, quindi $\dim \Lambda \geq 1$; in realtà se le 2 cubiche sono irriducibili, ogni cubica passante per i 9 punti appartiene al fascio $\mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, F_1))$, cioè $\dim \Lambda = 1$

$= 9 - 8$

$\Rightarrow$ i 9 punti impongono 8 condizioni indipendenti

Def.: Dati r punti di $\mathbb{P}^2$; se essi impongono r condizioni lin. INDIP alle curve di grado d, allora si dicono **IN POSIZ. GEN. RISP. alle CURVE DI GRADO d.**

es: 4 punti allineati: $d = 1$ non sono generali

$d = 2$ non sono generali

$d \geq 3$ sono generali

Teorema di GUIDO CASTELNUOVO
(Venezia 1865 – Roma 1952)

Siano $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^2$ punti distinti. Se $d \geq r-1$, allora i P_i sono in posiz. gen. risp. curve di grado d.

Dim. Fisso d, e dim. per induzione
su r con $r \leq d+1$.

$r=1$: ok.

Supp. vero $r-1$; cons. $P_1, \dots, P_r$

$(r \leq d+1 \Rightarrow r-1 \leq d+1)$

ogni sottoinsieme di $r-1$ punti impone cond. indip. in grado d ; $P_1, \dots, P_{r-1}$

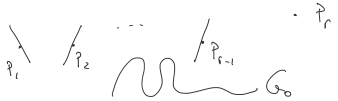
Sia $\Lambda_{r-1} = \{ [F] : P_1, \dots, P_{r-1} \in Z_p(F) \}$

$\dim \Lambda_{r-1} = N(d,2) - (r-1)$

$\Lambda_{r-1} \supsetneq \Lambda_r = \{ [F] : P_1, \dots, P_r \in Z_p(F) \}$

Un polinomio F t.c. $[F] \in \Lambda_{r-1} \setminus \Lambda_r$

è dato da :



$\forall$ $i = 1, \dots, r-1$ cons. rette $L_i \ni P_i$

$L_i \not\ni P_j \quad i \neq j$

$L_i = Z_p(H_i)$

sia G_0 di grado $\underbrace{d-(r-1)} \geq 0$

(ipotesi $d \geq r-1$)

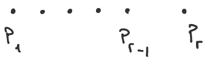
t.c. $Z_p(G_0) \not\ni P_k \quad \forall k = 1, \dots, r$

pongo: $F := H_1 \cdots H_{r-1} \cdot G_0 \in \Lambda_{r-1} - \Lambda_r$

Domanda $d \geq r-1$ è ottimale?

sì : esistono insiemi di r punti che impongono COND. DIP. alle curve di grado $d = r-2$:

- r punti allineati



se una curva di grado $r-2$ contiene $r-1$ punti allineati allora per il Teorema di Bèzout esse contiene tutte le rette passante per tali punti; in particolare contiene anche l'r-esimo punto. Quindi r punti allineati impongono condizioni LIN. DIPENDENTI.

Esercizio: Dati r punti del piano NON ALLINEATI, essi impongono condizioni INDIPENDENTI alle curve di grado r-2.

Vediamo un altro Teorema di tipo qualitativo, cons. del Teorema di Bèzout

Come conseg. avremo TEOREMA DI PASCAL (generalizz. T. di PAPPO)

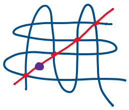
Prop: Siano $F, G \in K[x_0, x_1, x_2]_d$ e supp. $Z_P(F) \cap Z_P(G)$ siano d^2 punti distinti.
Se $\exists\ n < d$ t.c. nd di questi punti giacciono su una curva IRRIDUC. di grado n $\Rightarrow$ i rimanenti $d^2 - nd$ punti giacciono su curva di grado $d-n$.

Dim. Cons. $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F, G))$ fascio

sia H pol. irr. di grado n t.c.

nd punti sono su $Z_P(H)$.

Su $Z_P(H)$ cons. un ulteriore punto P diverso da tutti i precedenti



$d = 4$

$n = 1$

cons. $[R] \in \Lambda$ tal. che $Z_P(R) \ni P$

Oss. che $Z_P(R) \cap Z_P(H)$ contiene $nd+1$ punti

$\deg R = d$

$\Longrightarrow$ R e H hanno un fattore comune

Teo Bezout

$\Longrightarrow$

H irriducibile

$$R = H \cdot H_1$$

$$\deg H_1 = d - n$$

$$\underbrace{Z_p(R)}_{\in \Lambda} = \underbrace{Z_p(H)}_{\text{passa per } nd \text{ punti}} \cup Z_p(H_1)$$

$\in \Lambda$ quindi passa per d^2 punti

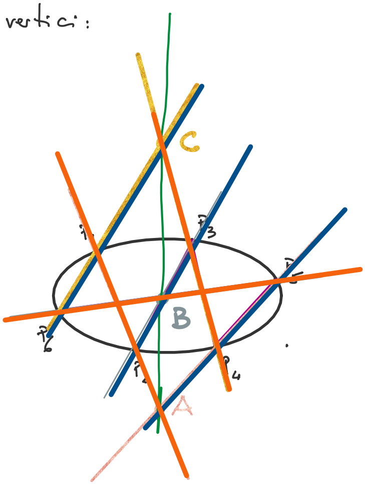
passa per nd punti $\Longrightarrow$ $Z_p(H_1)$ passa per $d^2 - nd$ punti

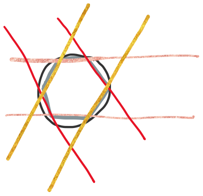
Teorema di Pascal:

Sia F pol. omogeneo irriduc. di grado 2

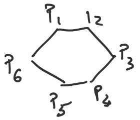
su $Z_p(F)$ fissiamo 6 punti distinti ordinati e cons.

l'esagono con tali vertici:





Cons. le 3 coppie di lati opposti, le coppie di rette che essi determinate e i punti di intersezione tra tali coppie di rette:



$$\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_4P_5} = A$$

$$\overline{P_2P_3} \cap \overline{P_5P_6} = B$$

$$\overline{P_3P_4} \cap \overline{P_6P_1} = C$$

Allora A, B, C sono ALLINEATI

Dim.:

Cons. le 2 seguenti cubiche : $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_3P_4} \cup \overline{P_5P_6}$

e $\overline{P_2P_3} \cup \overline{P_4P_5} \cup \overline{P_6P_1}$

si intersecano esattamente in $P_1, \dots, P_6, A, B, C$

9 punti $= 3 \cdot 3$

di questi $2 \cdot 3 = 6$ stanno su conica irrid.

$d=3$ $n=2$

$\underset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}$ i rimanenti $d^2 - nd = 9 - 6 = 3$ sono contenuti in curva di grado $d - n = 3 - 2 = 1$

OSS: Dati 6 punti su una conica, quanti esagoni si possono costruire?

6! permutazioni di 6 punti

12 permutazioni danno stesso esagono

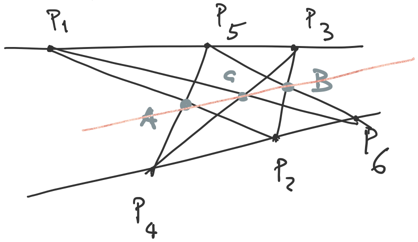
Quindi: $\dfrac{6!}{12}$ esagoni diversi

$$\frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{12}} = 60$$ esagoni diversi

per ognuno una retta di Pascal

ESAGRAMMA MISTICO DI PASCAL

Teorema di PAPPO è il Teo. di Pascal per una conica degenere :



Dati 6 punti $P_1, P_2, \dots, P_6$ tali che P_1, P_3, P_5 giacciono su una retta L_1, e P_2, P_4, P_6 giacciono su un'altra retta L_2, con $L_2 \neq L_1$ e $P_i \notin L_1 \cap L_2$ $\forall\, i = 1, \dots, 6$, se cons. l'esagono di vertici $P_1, \dots, P_6$, le coppie di rette su cui giacciono le 3 coppie di lati opposti si intersecano in 3 punti A, B, C che sono ALLINEATI.

Dim.:

Possiamo applicare il Teorema di Pascal 2 volte:

I punti P_1, P_3, P_5 sono allineati;

$\{P_1, P_3, P_5, P_2, P_4, P_6, A, B, C\}$

$d = 3$, $n = 1$ $\Rightarrow$ P_2, P_4, P_6, A, B, C sono contenuti in una conica:

Inoltre P_2, P_4, P_6 sono allineati $\Rightarrow$ applichiamo il Teorema di Pascal al caso $d = 2$, $n = 1$ $\Rightarrow$

A, B, C sono allineati.

Prossimo risultato:

Pb: Numero max di condiz. indip. date da pass. per punti

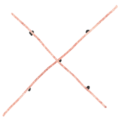
$$N(d,2) = \frac{d(d+3)}{2}$$

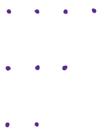
$$\max \leq \frac{d(d+3)}{2}$$

$\exists$ $\frac{d(d+3)}{2}$ punti in posiz. gen. curve di grado d? $\dim \Lambda = \frac{d(d+3)}{2} - \frac{d(d+3)}{2} = 0$

$d = 1$: 2 sì

$d = 2$: $\frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ punti sì



$d = 3$: $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ punti