Lezione 7 novembre 2024

giovedì 7 novembre 2024 09:07

SISTEMI LINEARI DI IPERSUPERFICIE PROIETTIVE

$$\dim \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d = \binom{n+d}{d}$$

X ipers. proiettiva, $X = (Z_p(F), F)$

OSS.: Se fissiamo $d \geq 1$, $Z_p(F)$ è determinato a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Vogliamo dare una struttura all'insieme delle ipersup. proiettive di grado d; una scelta naturale è di identificare ogni ipersuperficie con una classe

$$[F] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d) = \mathbb{P}^{N(d,n)}$$

$\Rightarrow$ l'insieme delle ipersuperfici di $\mathbb{P}^n$ di grado d viene identificato con uno spazio proiettivo.

$$\boxed{\begin{aligned} N(d,n) &= \dim \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d - 1 \\ &= \binom{n+d}{d} - 1 \end{aligned}}$$

Es: $d = 1$, $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_1$ forme lineari omogenee

$$\dim \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_1 = n+1 = \binom{n+1}{1}$$

$$N(1, n) = n+1-1 = n$$

$\Rightarrow$ lo spazio proiettivo delle classi di proporzionalità delle forme omogenee lineari ha dimensione n; e infatti corrisponde a $\mathbb{P}((\mathbb{K}^{n+1})^\vee) = (\mathbb{P}^n)^\vee$, il duale in quanto ogni polinomio omogeneo $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ corrisponde isomorficamente a una applicazione lineare $\mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$, data da

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to (a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

CASO PARTICOLARE:

$$d = 2, \quad n = 2 \quad : \quad N(2,2) = \binom{2+2}{2} - 1 = 5$$

CASO $n = 2$:

$$\boxed{N(d,2)} = \binom{2+d}{d} - 1 = \binom{d+2}{2} - 1$$

$$= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$$

$$= \frac{d^2 + 3d + 2 - 2}{2} = \boxed{\frac{d(d+3)}{2}}$$

Idea: Vogliamo generalizzare la nozione di fascio di rette o di iperpiani, e di fasci di coniche.

Dati 2 piani vettoriali H_1 e H_2 in $\mathbb{K}^3$

di equazioni cartesiane $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$

$$b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$$

il fascio di piani generato da H_1 e H_2 è la famiglia di piani

di equazione $\lambda (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) + \mu (b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) = 0$, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Siccome coppie di parametri (λ, μ) proporzionali danno luogo allo stesso piano in $\mathbb{K}^3$, è naturale considerare come spazio dei parametri la retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \ni (\lambda : \mu)$.

Ricordiamo ora che un piano vettoriale di $\mathbb{K}^3$ determina una retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, e un fascio di piani vettoriali determina un fascio di rette proiettive in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$.

OSS.: L'insieme delle equazioni di un fascio di piani vettoriali si può esprimere nella forma $\mathrm{Span}(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2,\ b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2)$, e rappresenta un piano in $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_1$.

Se prendiamo come spazio dei parametri $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$, gli elementi di un fascio di piani vettoriali, e quindi anche di un fascio di rette proiettive, si identifica con

$$\mathbb{P}(\mathrm{Span}(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2,\ b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2)).$$

Def: Un **SIST. LINEARE** di **DIM** $g \geq 0$ di **IPERSUPERFICI PROIETTIVE** di **grado** $d \geq 1$ è un SOTTOSP. PROIETTIVO Λ di dim g, quindi associato a un SSV di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ di dim $g+1$:

$$\Lambda = \mathbb{P}(U), \quad U \subseteq \mathbb{K}[x_i]_d$$
$$\dim U = g+1 \geq 1$$

Def.: Se $g=0$, Λ è un punto.
Se $g=1$, Λ si dice **FASCIO**
Se $g=2$, Λ si dice **RETE** (**NET**)
Se $g=3$, Λ si dice **TESSUTO** (**WEB**)

OSS.: È possibile capire come è fatta la generica ipersup. di Λ studiando la posizione di $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^{N(d,n)}$ rispetto a certi luoghi geometrici particolari.

Esempio: $d=2=n$, $\dim \Lambda = 1$

$N(2,2) = 5$

$\Lambda \subseteq \mathbb{P}^5$ è una retta; ogni suo punto rappresenta una conica.

Domanda: $\{\text{coniche degeneri}\} \subseteq \mathbb{P}^5$?

$\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2)$

base di $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\{x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$

$F = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

coordinate di F : $(a_{00}, 2a_{01}, 2a_{02}, a_{11}, 2a_{12}, a_{22})$

$\Rightarrow [F] = (a_{00} : 2a_{01} : 2a_{02} : a_{11} : 2a_{12} : a_{22})$

Cons. la matrice simmetrica A

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$Z_p(F)$ è conica degenere

$\iff$

$\det A = 0$

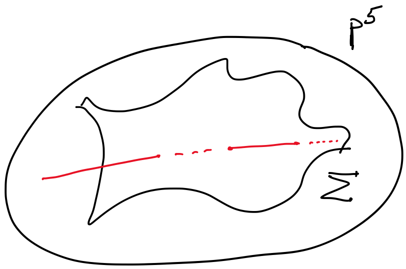
Se cons. a_{ij} come incognite (opp. x_{ij})

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} a_{0\sigma 0}\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdot (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in S_3} x_{0\sigma 0}\, x_{1\sigma(1)}\, x_{2\sigma(2)} \cdot (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}} = 0$$

è un polinomio omogeneo di terzo grado in 6 incognite x_{ij}

$\Rightarrow$ determina una IPERSUP. di $\mathbb{P}^5$ di grado 3 : Σ



Trovare le coniche degeneri di Λ fascio

$\Longleftrightarrow$ studiare i punti $\Lambda \cap \Sigma$

2 casi: • $\Lambda \not\subseteq \Sigma$ $\Rightarrow$ $1 \leq \# \Lambda \cap \Sigma \leq 3$:

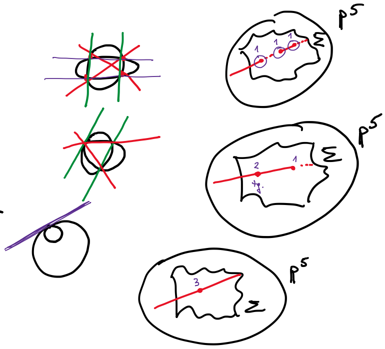
FASCIO GENERALE

$(\mathbb{K} = \mathbb{C})$

$\# \Lambda \cap \Sigma = 3$

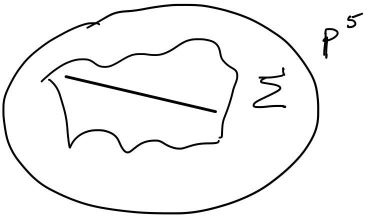
$\# \Lambda \cap \Sigma = 2$

$\# \Lambda \cap \Sigma = 1$

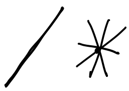


• $\Lambda \subseteq \Sigma$ $\Rightarrow$ ogni conica di Λ è degenere.

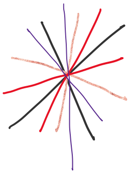
FASCIO DEGENERE



2 tipi : ⓐ



ⓑ



Pb.: Come assegnare Λ ?

$\Lambda = \mathbb{P}(U)$, U si può assegnare

con GENERATORI op. con EQ. CARTESIANE

Con generatori: $U = \mathrm{Span}(F_0, F_1, \dots, F_g)$

con $F_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ LIN. INDIP.

$\Lambda = \mathbb{P}(U)$; $F \in U$

$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_g F_g$

$[F] = [\lambda_0 F_0 + \dots + \lambda_g F_g]$

Con eq. cartesiane: $\dim U = g+1$

è il SSV delle soluzioni di un SLO

in $\binom{n+d}{d}$ incognite e

$\binom{n+d}{d} - (g+1)$ equazioni (omogenee)

$\Rightarrow$ le stesse equazioni determinano $\Lambda = \mathbb{P}(U)$

Def.: Ogni eq. lineare omogenea nelle incognite coefficienti del generico polinomio di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ si chiama CONDIZIONE LINEARE.

Notazione per le incognite: $w_{i_0 i_1 \cdots i_n}$

$$0 \le i_j \le d, \qquad i_0 + i_1 + \cdots i_n = d$$

es: w_{011} w_{101} w_{110} w_{002} w_{020} w_{200}
$d = 2 = n$

$$w_{011}\, x_0^0 \cdot x_1^1 \cdot x_2^1 + w_{101} \cdot x_0^1 \cdot x_1^0 \cdot x_2^1 + \cdots + w_{200} \cdot x_0^2 \cdot x_1^0 \cdot x_2^0$$

$$w_{011}\, x_1 x_2 + w_{101}\, x_0 x_2 + \cdots + w_{200}\, x_0^2$$

Esempio di cond. lineare:

PASSAGGIO per un punto:

$$A = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n$$

cons. $F \quad : \quad F(A) = 0$

$$F = \sum w_{i_0 \cdots i_n}\, x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

$$\sum w_{i_0 \cdots i_n}\, a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n} = 0$$

è una eq. LIN. nelle incognite $w_{i_0 \cdots i_n}$

es. $d = 2 = n$

$$w_{011}\, a_1 a_2 + w_{101}\, a_0 a_2 + w_{110}\, a_0 a_1 + w_{002}\, a_2^2 + w_{020}\, a_1^2 + w_{200}\, a_0^2 = 0$$

$$A = (0 : 0 : 1) \quad : \quad w_{002} = 0$$

$\Rightarrow$ pass. per A def. un SIST. LIN di

codim 1 (cioè un PERPIANO),

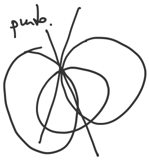
$$\dim \Lambda = N(d, n) - 1$$

Esercizio: In $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2)$

trovare una condizione lineare che

non corrisponde al passaggio per

alcun punto.



Es: Condizione di singolarità in $Q \in \mathbb{P}^n$

$$Q = (q_0 : \cdots : q_n)$$

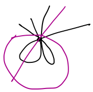
$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{x_j} F = \sum_{i_j \ge 1} w_{i_0 \cdots i_n} (i_j - 1) \cdot q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_j^{i_j - 1} \cdots q_n^{i_n} = 0$$

$$\partial_{x_j} F(Q) =$$

$\Rightarrow$ $(n+1)$ eq. lineari

Esercc. sono eq. INDIP

$$\text{e} \quad \dim \Lambda = N(n, d) - (n+1)$$