Lezione 14 novembre 2024

giovedì 14 novembre 2024 09:16

Visto: Sist. lineari e Teor. di Castelnuovo

Ricordiamo $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d) = \mathbb{P}^{N(d,2)}$

$N(d,2) = \frac{d(d+3)}{2}$, $d=2$: $N(2,2) = 5$
$d=3$ $N(3,2) = 9$
$d=4$, $N(4,2) = 14$

Possiamo imporre passaggio per $N(d,2)$ punti

Visto: Castelnuovo $r \leq d+1$ in posizione arbitraria impongono cond. indipendenti alle curve di grado d:

$d = 2$: $r \leq 3$
$d = 3$ $r \leq 4$
$d = 4$ $r \leq 5$

e la limitazione è ottimale.

Quindi, presi $r \geq d+2$ punti in posizione arbitraria, può succedere che le condizioni imposte siano DIPENDENTI.
Ad ogni modo, se i punti sono scelti in modo opportuno, vedremo che le condizioni imposte sono INDIPENDENTI.

Iniziamo considerando il numero massimo di condizioni indipendenti:

Pb: $\exists$ config. di $N(d,2) = \frac{d(d+3)}{2}$ punti che impongano $N(d,2)$ condizioni indipendenti?

Se sì, avremo:

$$\Lambda = \{ [F] : Z_p(P) \ni P_1, .., P_{N(d,2)} \}$$

$$\dim \Lambda = N(d,2) - N(d,2) = 0$$

$$\Lambda \cong \mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(\text{retta vettoriale}) = \{[F]\}$$

cioè, a meno di fattori moltiplicativi, $\exists!$ F di grado d t.c.

$$F(P_i) = 0 \qquad \forall i = 1, .., N(d,2)$$

$\Rightarrow$ $1! : Z_p(F) \ni P_i$.

La risposta è affermativa, e abbiamo la seguente:

PROP.: $\exists$ $N(d,2)$ punti in posizione generale risp. alle curve di grado d.

Dim.: Scegliamo $d+1$ punti allineati su retta L_1

Scegliamo d punti su retta L_2, non app. a L_1

Scegliamo $d-1$ punti su retta L_3, non app. né a L_1 né a L_2

⋮

scegliamo 2 punti su rette L_d, non app.

a nessuna delle precedenti

Abbiamo fissato complessivamente

$2+3+4+\cdots+(d+1)$ punti

$$= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2} = N(d,2)$$

Cons. $\Lambda = \{[F] \ : \ F(P_i) = 0 \ \forall i = 1,\dots,N(d,2)\}$

Affermo che $\dim \Lambda = 0$

Se per assurdo $\dim \Lambda \geq 1$, potrei imporre

pass. per un ulteriore punto $P_{N(d,2)+1}$

Scelgo $P_{N(d,2)+1}$ su nessuna delle rette $L_1,\dots,L_d$

Curve di grado d passanti per questi punti: G di grado d

$$Z_p(G) \cap L_1 \supseteq \{P_1,\dots,P_{d+1}\}$$

$d+1$ punti distinti

$\Rightarrow$ Teo. di Bézout : $L_1 \subseteq Z_p(G)$

$L_1 = Z_p(H_1) \Rightarrow H_1 \mid G$

$G = H_1 \cdot G_1$

$\deg G_1 = d-1$

$$Z_p(G) \cap L_2 \supseteq \{P_{d+2},\dots,P_{2d+2}\}$$

d punti distinti

$$Z_p(G) = \underbrace{Z_p(H_1)}_{=L_1} \cup Z_p(G_1)$$

i punti $P_{d+2},\dots,P_{2d+2}$ sono stati scelti

NON su L_1 $\Rightarrow \{P_{d+2},\dots,P_{2d+2}\} \subseteq Z_p(G_1)$

$\supseteq$ d punti distinti su L_2

$Z_p(G_1) \cap L_2$ $\xRightarrow{\text{Bézout}}$ $L_2 \subseteq Z_p(G_1)$

$\Rightarrow L_2 = Z_p(H_2)$, $H_2 \mid G_1$

$G_1 = H_2 \cdot G_2$

con $\deg G_2 = d-2$

procediamo in questo modo, fino ad arrivare 2 ultimi punti : $G = H_1 \cdot H_2 \cdots H_{d-1} \cdot G_{d-1}$

$\deg G_{d-1} = d-(d-1) = 1$

$Z_p(G_{d-1}) \supseteq \{2 \text{ punti}\}$ su nessuna delle rette precedenti

$\Rightarrow Z_p(G_{d-1}) = L_d = Z_p(H_d)$

$\Rightarrow G = c \cdot H_1 \cdot H_2 \cdots H_d$, c costante

e per costruzione $G(P_{N(d,2)+1}) \neq 0$
poiché $P_{N(d,2)+1}$ non annulla nessuna delle forme lineari H_i.

CONSEGUENZA: $\forall\, d \geq 1$, $\exists\, N(d,2)+1$ punti del piano che non giacciono su nessuna curva di grado d.

$d=2$: $\exists$ 6 punti non su conica

$d=3$ $\exists$ 10 punti non su cubica

Infatti: Basta scegliere $N(d,2)$ punti che giacciono su 1! curva di grado d, e scegliere poi l'$(N(d,2)+1)$-esimo fuori da tale curva.

OSS: Ricordiamo che imporre che un dato punto Q sia singolare corrisponde a 3 condizioni lineari linearmente indipendenti. Quindi imporre che r punti $P_1, \dots, P_r$ siano singolari corrisponde a un numero di condizioni $\leq 3r$.

La discussione dell'indip. delle $3 \cdot r$ condizioni corrispondenti è molto complicata.

Teorema (Alexander - Hirschowitz 1994)
Se $P_1, \dots, P_r$ in POSIZ. GEN. rispetto a curve di grado d; allora le condiz. di SINGOLARITÀ in $P_1, \dots, P_r$ sono il massimo possibile:

$$\Lambda = \{ [F] : \operatorname{Sing} Z_P(F) \supseteq \{P_1, \dots, P_r\} \}$$

$$\operatorname{codim} \Lambda = \min \{ 3r, N(d,2)+1 \}$$

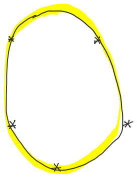
con 1 eccezione: $(d,r) = (4,5)$

$d=4$, $r=5$: $\min\{3r, N(4,2)+1\}$
$= \min\{15, 14+1\} = 15$

$\Rightarrow \operatorname{codim} \Lambda = 15$, $\dim \Lambda = 14 - 15 = -1$

e per convenz. $\dim \Lambda = -1 \iff \Lambda = \emptyset$

Invece si ha:



per 5 punti passa almeno 1 conica: $Z_P(F)$
cons.
F^2 : la curva è non ridotta

Torniamo ai punti semplici (non singolari) di una curva piana; $Q \in Z_P(F)$, retta tg.

$${}^t\nabla F(Q)\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$$

Def.: Sia $(Z_p(F), F)$ curva piana proiettiva di grado $d\geq 2$

La PRIMA POLARE RISP. PUNTO $R\in\mathbb{P}^2$, $R=(r_0:r_1:r_2)$ è la CURVA DI EQ.:

$$r_0\cdot\underbrace{\partial_{x_0}F}_{d-1}+r_1\cdot\underbrace{\partial_{x_1}F}_{d-1}+r_2\cdot\underbrace{\partial_{x_2}F}_{d-1}=0 \quad : Pol_R F$$

in generale è un pol. non nullo di grado $d-1$

Def: Il SIST. LINEARE $\Sigma_F := \mathbb{P}(\mathrm{Span}(\partial_{x_0}F, \partial_{x_1}F, \partial_{x_2}F))$ si chiama SIST. LINEARE POLARE di $Z_p(F)$.

$$[Pol_R F]\in\Sigma_F\,.$$

PROPRIETÀ delle CURVE POLARI:

Supp. $R=(r_0:r_1:r_2)$ t.c.

$Pol_R F\not\equiv 0$

$$Z_p(r_0\,\partial_{x_0}F+r_1\,\partial_{x_1}F+r_2\,\partial_{x_2}F)$$

$${}^t\nabla F\cdot\begin{pmatrix}r_0\\r_1\\r_2\end{pmatrix}=0$$

Voglio capire $Z_p(Pol_R F)\cap Z_p(F)\ni Q$

2 casi: • $F(Q)=0$

e $\partial_{x_0}F(Q)=0=\partial_{x_1}F(Q)=\partial_{x_2}F(Q)$

$\Longrightarrow$ $Q\in\mathrm{Sing}\,Z_p(F)$

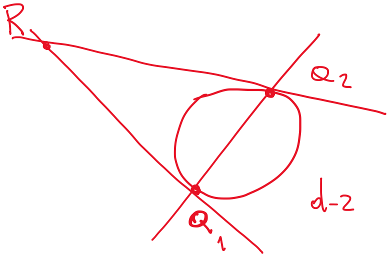
- $F(Q) = 0$

$$\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$R \in T_Q Z_p(F)$$

PROP.: $Z_p(F) \cap Z_p(Pol_R F) = \operatorname{Sing} Z_p(F) \cup \underbrace{\{Q : \overline{RQ} = T_Q Z_p(F)\}}_{\text{i punti di tangenza delle rette tangenti a } Z_p(F) \text{ USCENTI da } R}$



COR.: Data curva di grado d irriducibile; per un punto $R \in \mathbb{P}^2$, il numero n di rette tg a un punto non singolare e uscenti da R è limitato da:

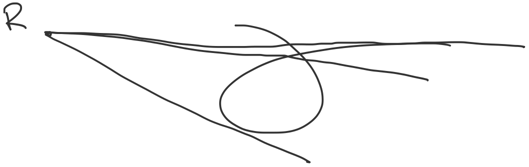
$$n \leq d \cdot (d-1)$$

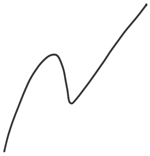
Dim: R generale, $Pol_R F \not\equiv 0$ ha grado $d-1$

F irriducibile di grado $d > d-1 = \deg Pol_R F$

$\Rightarrow$ F e $Pol_R F$ non hanno componenti comuni

$$\underset{\text{Bézout}}{\Rightarrow} \quad n \leq \sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(Pol_R F)} I_Q(F, Pol_R F) = d \cdot (d-1)$$





OSS.: Se $\underline{R \in Z_p(F)}$

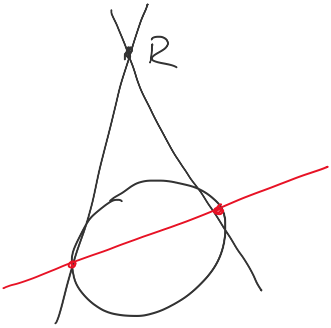
$$Pol_R F = r_0 \partial_0 F + r_1 \partial_{x_1} F + r_2 \partial_{x_2} F$$

$$r_0 \partial_0 F(R) + r_1 \partial_1 F(R) + r_2 \partial_2 F(R) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Eulero}}}{=} (\deg F) \cdot F(R) = 0$$

$$\Rightarrow R \in Z_p(Pol_R F)$$

In generale ciò non vale.

Nel caso delle coniche abbiamo il seguente:



LEMMA: Sia $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ una conica irriducibile. Se $R \in Z_p(F)$, allora la retta polare

$$Z_p(Pol_R F) = \mathcal{E}_R Z_p(F)$$

è la retta tangente in R.

Dim.: Abbiamo visto che se $R \in Z_p(F) \Rightarrow R \in Z_p(Pol_R F) =: L$

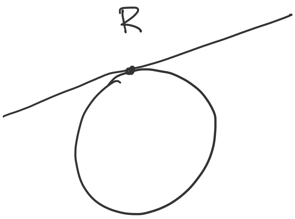
Affermiamo che $L \cap Z_p(F) = \{R\}$. Supp. per assurdo che $L \cap Z_p(F) = \{R, R'\}$ con $R' \neq R$.

Allora la retta tg $\mathcal{E}_{R'} Z_p(F)$ a $Z_p(F)$ in R' passa per R; questo è assurdo, perché $I_{R'}(\mathcal{E}_{R'}, Z_p(F)) = 2$, ed essendo $\deg F = 2$, non ci sono altri punti in $\mathcal{E}_{R'} Z_p(F) \cap Z_p(F)$.

Quindi $L \cap Z_p(F) = \{R\}$, dunque

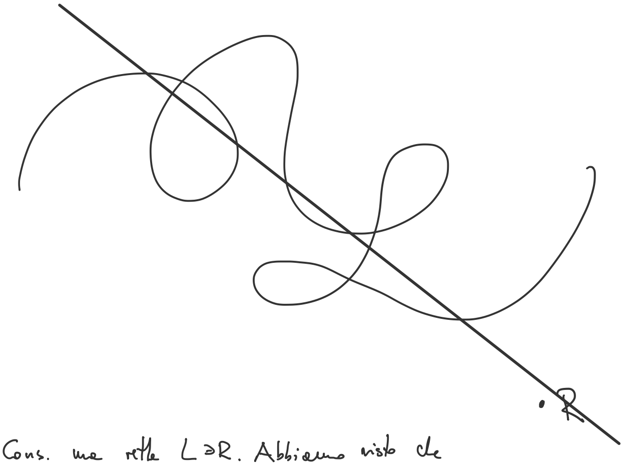
$$I_R(L, Z_p(F)) = 2$$

e dalla definizione $L = \mathcal{T}_R Z_p(F)$.



CONSEGUENZA

Prop.: Sia $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ irriducibile e ridotta. Allora per $R \in \mathbb{P}^2 \setminus Z_p(F)$, la generica retta (cioè un numero infinito di rette per R) interseca $Z_p(F)$ in $d = \deg F$ PUNTI DISTINTI.



Dim. Cons. una retta $L \ni R$. Abbiamo visto che

$$\sum_{Q \in L \cap Z_p(F)} I_Q(L, Z_p(F)) = d$$

In un punto Q si ha $I_Q \geq 2 \iff Q$ è singolare, oppure $L = \mathcal{T}_Q Z_p(F)$.

Abbiamo visto: $\# \operatorname{Sing} Z_p(F) < +\infty$ e che il # di tangenti uscenti da R è finito $(\leq d(d-1)) \Rightarrow$ solo un numero finito di rette per R ha tra i punti di intersezione qualche punto Q con $I_Q \geq 2$.