Istituzioni di Algebra e Geometria
A.A. 2024/2025
Foglio di esercizi 4

18 novembre 2024

1. Sia $Z_P(F) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una ipersuperficie proiettiva, e sia $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una proiettività determinata da una matrice invertibile A. Si dimostri che se un punto $Q \in Z_P(F)$ è singolare, allora $\varphi(Q)$ è singolare per la ipersuperficie immagine $\varphi(Z_P(F))$.

   Suggerimento: si consideri la regola per il differenziale di una mappa composta.

2. Usando l'esercizio precedente, si dimostri che la condizione sulle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di avere un punto singolare assegnato corrisponde a $n+1$ condizioni lineari linearmente indipendenti sui coefficienti del generico polinomio.

3. Si dimostri che ogni superficie cubica con solo singolarità isolate ha al più quattro punti singolari.

4. Si determinino i punti singolari e i coni tangenti nei punti singolari della superficie cubica di $\mathbb{P}^3$

$$x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 0.$$

5. Si determinino esplicitamente le condizioni sui coefficienti dei polinomi $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$ di avere:

   - tangente $x_1 = 0$ in $(1 : 0 : 1)$;
   - tangente $x_1 - x_2 = 0$ in $(1 : 1 : 1)$;
   - una singolarità nel punto $(1 : 0 : 0)$.

Se ne deduca la dimensione del sistema lineare corrispondente.

Ci sono curve irriducibili in tale sistema lineare?

6. Si dimostri che fissati cinque punti arbitrari su una conica piana irriducibile, il passaggio per essi impone cinque condizioni linearmente indipendenti ai polinomi omogenei di grado 2 in tre indeterminate.

7. Si dimostri che se r punti del piano non sono allineati, allora impongono r condizioni indipendenti alle curve piane di grado $d = r - 2$.

8. Si consideri la cubica proiettiva piana $\mathcal{C}$ di equazione

$$x_1^3 + x_0 x_1^2 - x_0 x_2^2 = 0.$$

Usando la nozione di curva polare, si determinino tutte le tangenti a $\mathcal{C}$ uscenti dal punto $(0 : 1 : 0)$.

Si determini, inoltre, una retta passante per $(0 : 1 : 0)$ che interseca $\mathcal{C}$ in tre punti distinti.