1

Una corda elastica si estende lungo l'asse x nell'intervallo $[-L, L]$. Denotando con $u(t,x)$ lo spostamento verticale dalla posizione di equilibrio nel punto x al tempo t, l'equazione che ne determina l'evoluzione temporale è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

Si consideri la condizione iniziale $u(0,x) = A(1 - |x|/L)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$. Si trovi $u(t,x)$ usando la serie di Fourier.

2

Per ciascuna di queste funzioni della variabile reale t, si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e/o $L^2(\mathbb{R})$

$$|t|^\alpha\ ,\quad \theta(|t|-1)|t|^\alpha\ ,\quad e^{-|t|}|t|^\alpha\ ,\quad \chi(t)|t|^\alpha\ ,\quad \frac{\theta(|t|-1)}{\sqrt{t^2-1}}|t|^\alpha\ ,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione theta di Heaviside definita da

$$\theta(x) = \begin{cases} 1\ , & x \geq 0 \\ 0\ , & x < 0\ , \end{cases}$$

e $\chi(t)$ è la funzione di Dirichlet definita da

$$\chi(t) = \begin{cases} 1\ , & t \in \mathbb{Q} \\ 0\ , & t \notin \mathbb{Q}\ . \end{cases}$$