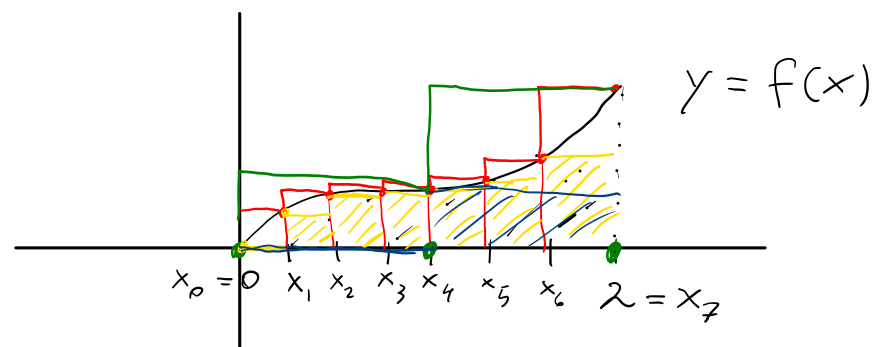


18 Novembre

Oggi niente ricevimenti

L'integrale



$\int_0^2 f(x) dx$ rappresenterà l'area della regione sotto il grafico di f .

Con un maggior numero di rettangoli resterà definito

l'integrale superiore $\int_0^{x_2} f(x) dx$

(questo era relativo alle unioni di rettangoli che contengono la regione sotto il grafico)

Con un maggior numero di rettangoli (relativamente alle unioni di rettangoli contenute nella regione sotto il grafico)

resterà definito l'integrale inferiore $\int_0^2 f(x) dx$

f sarà integrabile per Darboux quando

$$\int_0^{x_2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \quad (= \int_0^2 f(x) dx)$$

Fissiamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f limitato

(cioè $\exists m \leq M$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$)

Decomposizioni di $[a, b]$

Una decomposizione Δ consiste di una sequenza finita

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \quad [a, b] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$$

Il valore di Δ è il numero

$$|\Delta| = \max \{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n \}$$

Dati due decomposizioni

$$\Delta_1 \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\Delta_2 \quad y_0 = a < y_1 < \dots < y_N = b$$

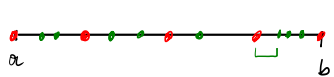
diciamo che Δ_2 è un raffinamento di Δ_1 , e

$$\text{scriviamo } \Delta_2 \prec \Delta_1$$

$$\text{se } \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$$

Notare che questo significa che $\forall [y_{j-1}, y_j] \quad j=1, \dots, N$

$$\exists i_0 \text{ t.c. ed } n \text{ t.c. } [y_{j-1}, y_j] \subseteq [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$$



Δ_1

vale anche
il viceversa.

Δ_2

Notare che se $\Delta_2 \prec \Delta_1$ allora $|\Delta_2| \leq |\Delta_1|$

Scriviamo $\Delta_2 \prec \Delta_1$ se $\Delta_2 \prec \Delta_1$ e $\Delta_2 \neq \Delta_1$

Dato

$$\Delta_1 \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{notare che}$$

$$\sum_{i=1}^n | [x_{i-1}, x_i] | = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a$$

Provare $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato e una decomposizione

$$\Delta \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \quad m \leq f(x) \leq M \\ \forall x \in [a, b]$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

Qui $\sup f([x_{i-1}, x_i]) \leq \sup f([a, b]) \leq M$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

$$m \leq \inf f([a, b]) \leq \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

Esempio $f(x) \equiv c \quad f([a, b]) = \{c\}$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup \{c\} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c$$

$$= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf \{c\} = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

Funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$D([x_{i-1}, x_i]) = \{ D(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \} = \{1, 0\}$$

$$\sup D([x_{i-1}, x_i]) = \sup \{0, 1\} = 1$$

$$\inf D([x_{i-1}, x_i]) = \inf \{0, 1\} = 0$$

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup \overbrace{D([x_{i-1}, x_i])}^{\{0, 1\}} = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a \end{aligned}$$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

Sia f crescente : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{cioe } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Resulta $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, quindi f è limitato

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{f([x_{i-1}, x_i])} f(x_i)$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

$$\begin{aligned} s(\Delta) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{f([x_{i-1}, x_i])} f(x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente allora

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b) \quad \text{e in } h$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

Lemma Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato e non

$$\Delta_2 \preceq \Delta_1 \quad (\Delta_2 \text{ un raffinamento di } \Delta_1)$$

$$s(\Delta_1) \leq s(\Delta_2) \leq S(\Delta_2) \leq S(\Delta_1)$$

Dim in un caso particolare.

$$\Delta_1 \quad x_0 = a \quad x_1 = b \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ a \qquad \qquad b \end{array}$$

$$\Delta_2 \quad y_0 = a < y_1 < y_2 = b \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ a \qquad y_1 \qquad b \end{array}$$

$$\sup f([a, y_1]) \leq f([a, b])$$

$$f([y_1, b]) \leq f([a, b])$$

$$\Rightarrow \sup f([a, y_1]) \leq \sup f([a, b])$$

$$\sup f([y_1, b]) \leq \sup f([a, b])$$

$$S(\Delta_2) = (y_1 - a) \underbrace{\sup f([a, y_1])}_{\leq \sup f([a, b])} + (b - y_1) \underbrace{\sup f([y_1, b])}_{\leq \sup f([a, b])}$$

$$\leq (y_1 - a) \sup f([a, b]) + (b - y_1) \sup f([a, b])$$

$$= [(y_1 - a) + (b - y_1)] \sup f([a, b])$$

$$= (b - a) \sup f([a, b]) = S(\Delta_1)$$

$$S(\Delta_2) \leq S(\Delta_1)$$

$$f([a, y_1]) \leq f([a, b])$$

$$f([y_1, b]) \leq f([a, b])$$

$$\inf f([a, y_1]) \geq \inf f([a, b])$$

$$\inf f([y_1, b]) \geq \inf f([a, b])$$

$$s(\Delta_2) = (y_1 - a) \underbrace{\inf f([a, y_1])}_{\geq \inf f([a, b])} + (b - y_1) \underbrace{\inf f([y_1, b])}_{\geq \inf f([a, b])}$$

$$\geq (y_1 - a) \inf f([a, b]) + (b - y_1) \inf f([a, b])$$

$$= [(y_1 - a) + (b - y_1)] \inf f([a, b])$$

$$= (b - a) \inf f([a, b]) = s(\Delta_1)$$

$$s(\Delta_2) \geq s(\Delta_1) \quad ,$$

In generale se $\Delta_2 \preceq \Delta_1$ si riesce

a trovare decomposizioni compatibili

$$\Delta_2 \preceq \Gamma_1 \preceq \dots \preceq \Gamma_N \preceq \Delta_1$$

dove Γ_i è ottenuto da Γ_{i+1}

decomponendo in due un unico intervallo di Γ_{i+1}

$$\text{Si dimostra allora, } s(\Gamma_i) \leq S(\Gamma_{i+1})$$

$$s(\Gamma_i) \geq s(\Gamma_{i+1})$$

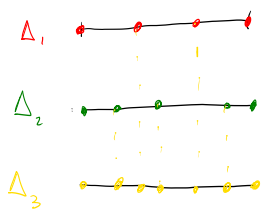
$$S(\Delta_2) \leq S(\Gamma_1) \leq S(\Gamma_2) \leq \dots \leq S(\Gamma_N) \leq S(\Delta_1)$$

$$\Rightarrow S(\Delta_2) \leq S(\Delta_1)$$

$$s(\Delta_2) \geq s(\Gamma_1) \geq s(\Gamma_2) \geq \dots \geq s(\Gamma_N) \geq s(\Delta_1)$$

$$\Rightarrow s(\Delta_2) \geq s(\Delta_1)$$

Lemma Dato due decomposizioni Δ_1 e Δ_2 esiste una decomposizione Δ_3 più raffinata di entrambe.



Corollario $\forall$ coppia di decomposizioni Δ_1, Δ_2 si ha $s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$

Dim Sia Δ_3 un raffinamento di Δ_1 e Δ_2 .

Dal lemma prima

$$s(\Delta_1) \leq s(\Delta_3) \leq S(\Delta_3) \leq S(\Delta_2) \Rightarrow s(\Delta_1) \leq S(\Delta_2)$$

conseguenza del corollario è che, se $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le decomposizioni allora la seguente coppia di insiemi è non vuota

$$\begin{aligned} & \{s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} \quad \{S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} \\ & \text{Perciò} \quad \int_a^b f(x) dx = \inf \{S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} \\ & \quad \quad \quad \int_a^b f(x) dx = \sup \{s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

$$\text{Noto che } s(\Delta) \leq S(\Delta_1) \quad \forall \Delta \in \mathcal{D} \Rightarrow \sup \{s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\} \leq S(\Delta_1)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_1) \quad \forall \Delta_1 \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \inf \{S(\Delta_1) : \Delta_1 \in \mathcal{D}\} = \int_a^b f(x) dx$$

Conclusione $\forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato si ha

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Def $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato si dice

integrabile per Darboux se $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Il loro comune valore viene chiamato l'integrale di Darboux di f e viene denotato

$$\text{con } \int_a^b f(x) dx.$$