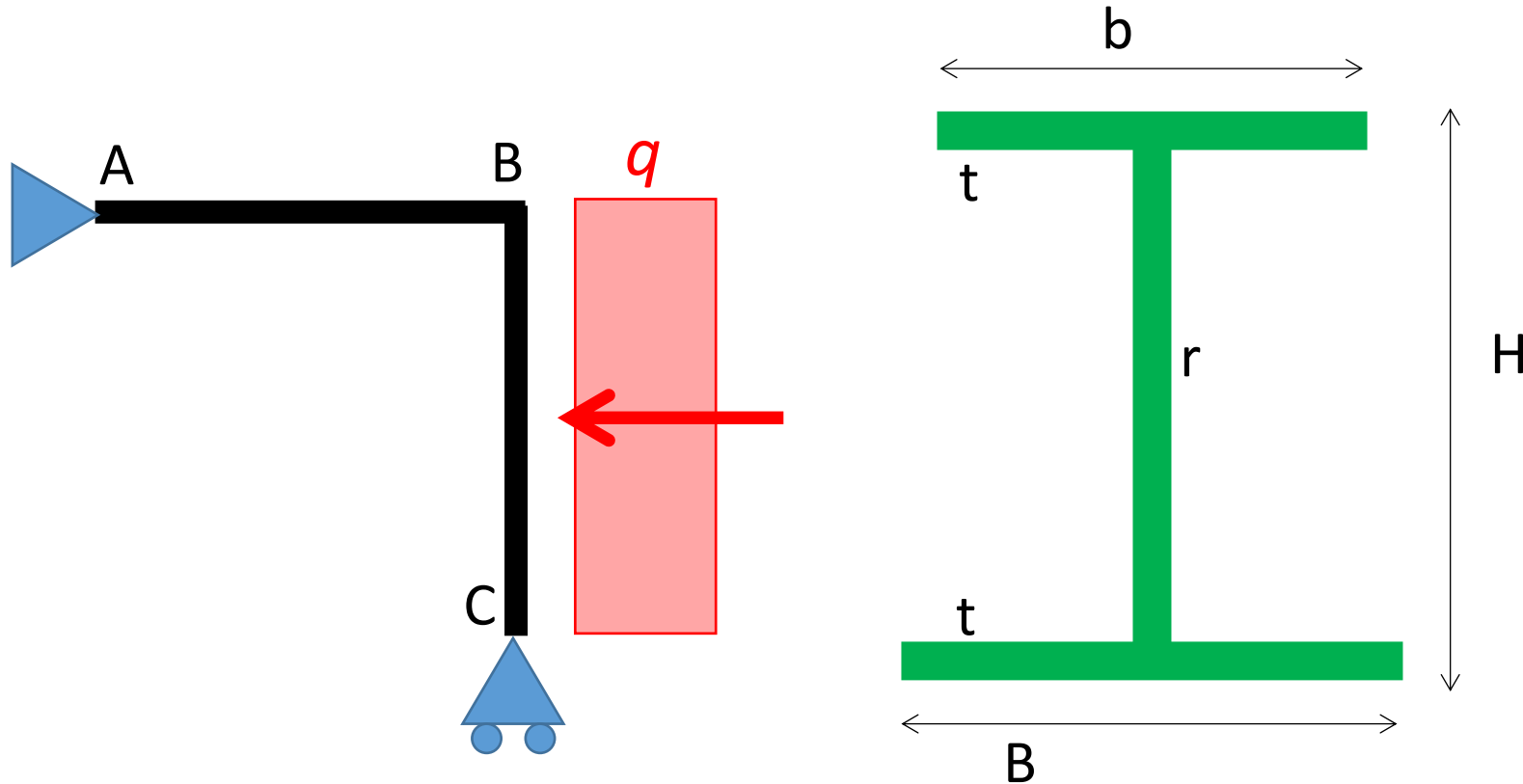




## ESERCIZIO 2

# VERIFICA DI RESISTENZA DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA IN ACCIAIO

# ESERCIZIO 2



DATI

$AB = BC = L = 4 \text{ m}$

$q = 11 \text{ kN/m}$

$H = 200 \text{ mm}$

$B = 140 \text{ mm}$

$b = 80 \text{ mm}$

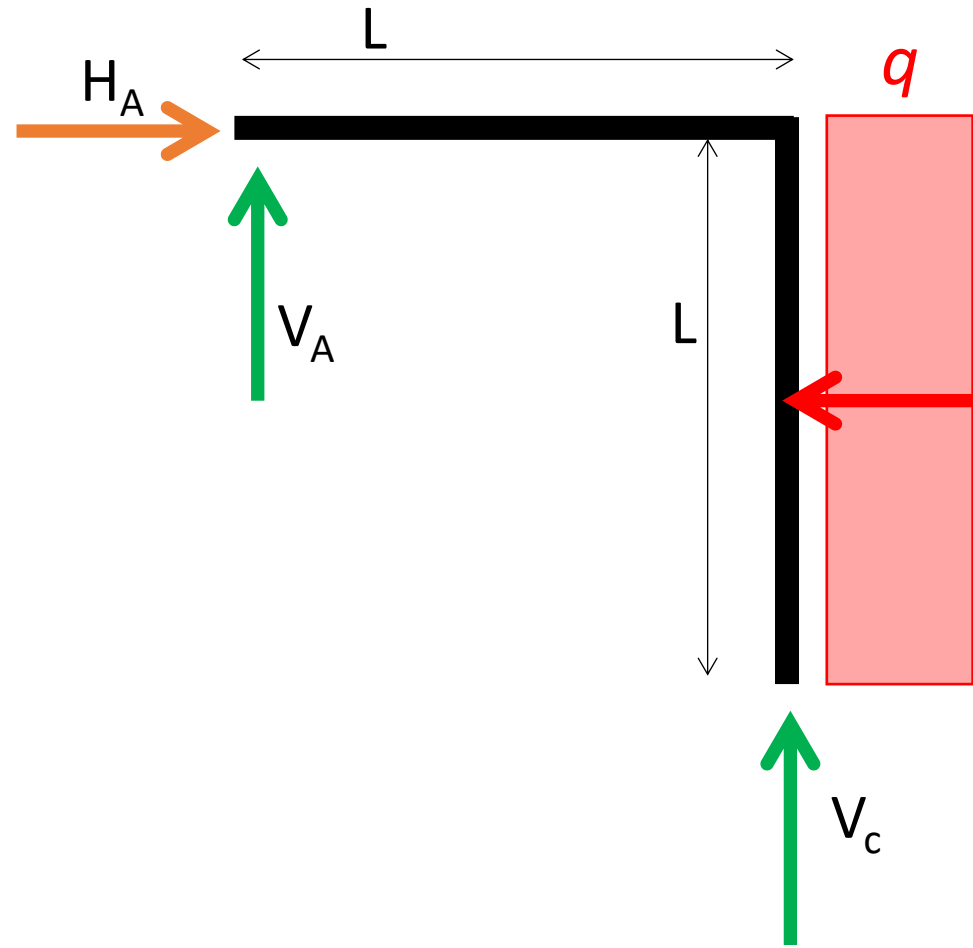
$t = 10 \text{ mm}$

$r = 15 \text{ mm}$

Si risolva lo schema statico assegnato, tracciandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e verificando la sezione più sollecitata.

A tale scopo, si considerino i dati riportati in figura, e che la tensione di snervamento dell'acciaio è  $\sigma_y = 275 \text{ MPa}$

# 1) Reazioni vincolari



(1) Traslazione Orizz.

(2) Traslazione Verticale

(3) Rotazione (A)

**REAZIONI VINCOLARI**

$H_A - qL = 0 \implies H_A = qL$

$V_A + V_C = 0 \implies V_A = -V_C$

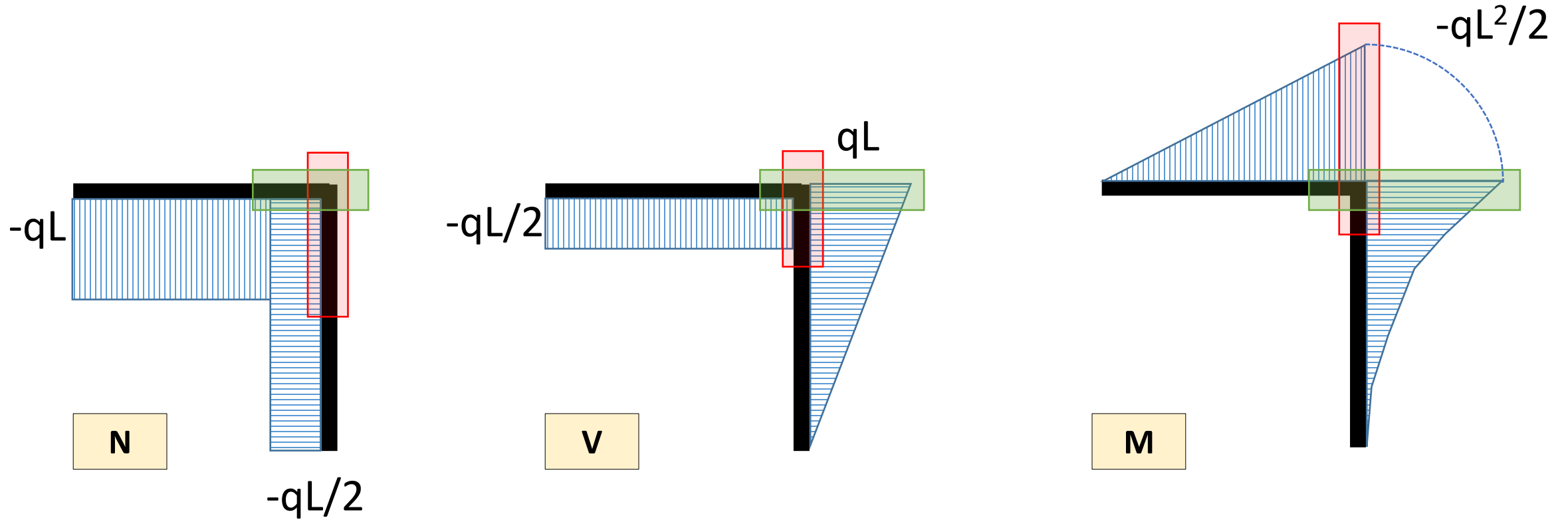
$-qL \times (L/2) \times + V_C \times L = 0$

**E QUINDI:**

$V_C = qL/2$

$V_A = -V_C = -qL/2$

## 2) Caratteristiche della sollecitazione



...e 3) sezione più sollecitata

Sezione B<sup>SX</sup>



$$N = -qL$$

$$V = -qL/2$$

$$M = -qL^2/2$$

Sezione B<sup>DX</sup>

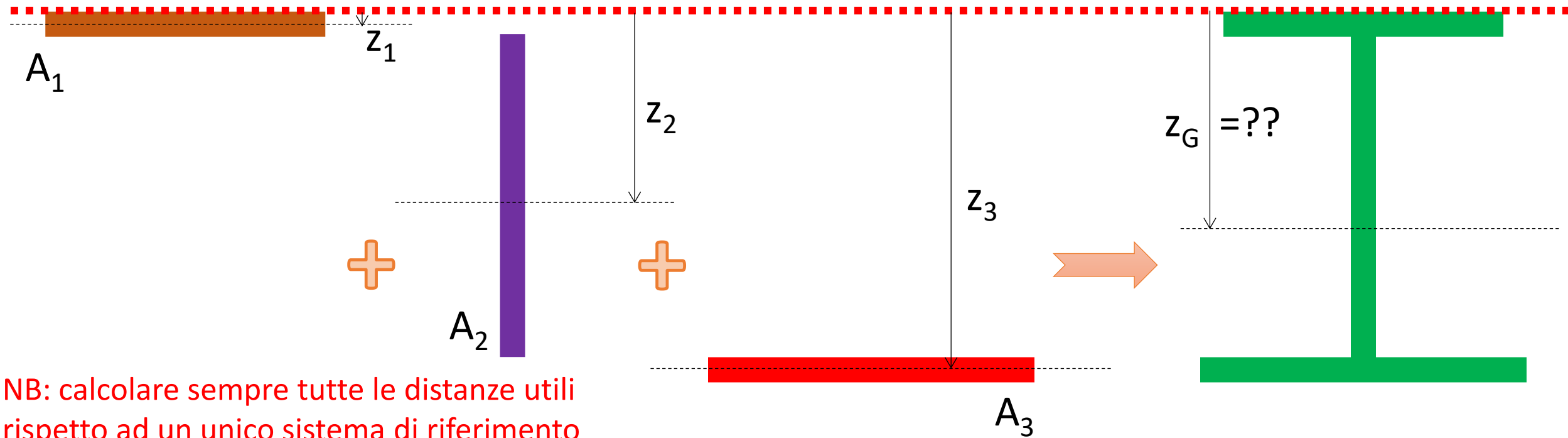


$$N = -qL/2$$

$$V = qL$$

$$M = -qL^2/2$$

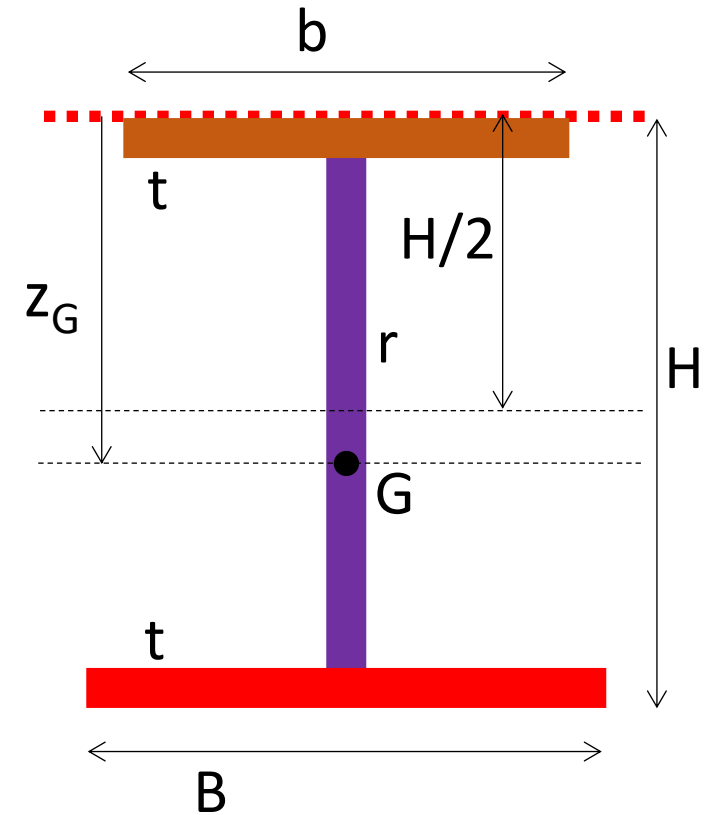
# 4) Proprietà inerziali della sezione



- (1) Baricentro della sezione (non simmetrica!)
- (2) Momento d'inerzia

# 4) Proprietà inerziali della sezione

$z_G > H/2 = 100 \text{ mm}$   
 Quindi il baricentro  $G$   
 è spostato verso il basso



(1)

$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= (b \times t) + (r \times (H - t - t)) + (B \times t) =$$

$$= 4900 \text{ mm}^2$$

$$z_G = S_y / A =$$

$$= ((A_1 \times z_1) + (A_2 \times z_2) + (A_3 \times z_3)) / A =$$

$$= 111.63 \text{ mm}$$

(2)

$$J_y = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + \text{trasporto} =$$

$$= J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + A_1 \times (d_1^2) + A_2 \times (d_2^2) + A_3 \times (d_3^2) =$$

$$= 2.65 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J^{(1)} = (1/12) \times b \times (t^3)$$

$$J^{(2)} = (1/12) \times r \times (H - 2t)^3$$

$$J^{(3)} = (1/12) \times B \times (t^3)$$

$$d_1 = z_G - t/2$$

$$d_2 = (H - 2t)/2 + t - z_G$$

$$d_3 = H - t/2 - z_G$$

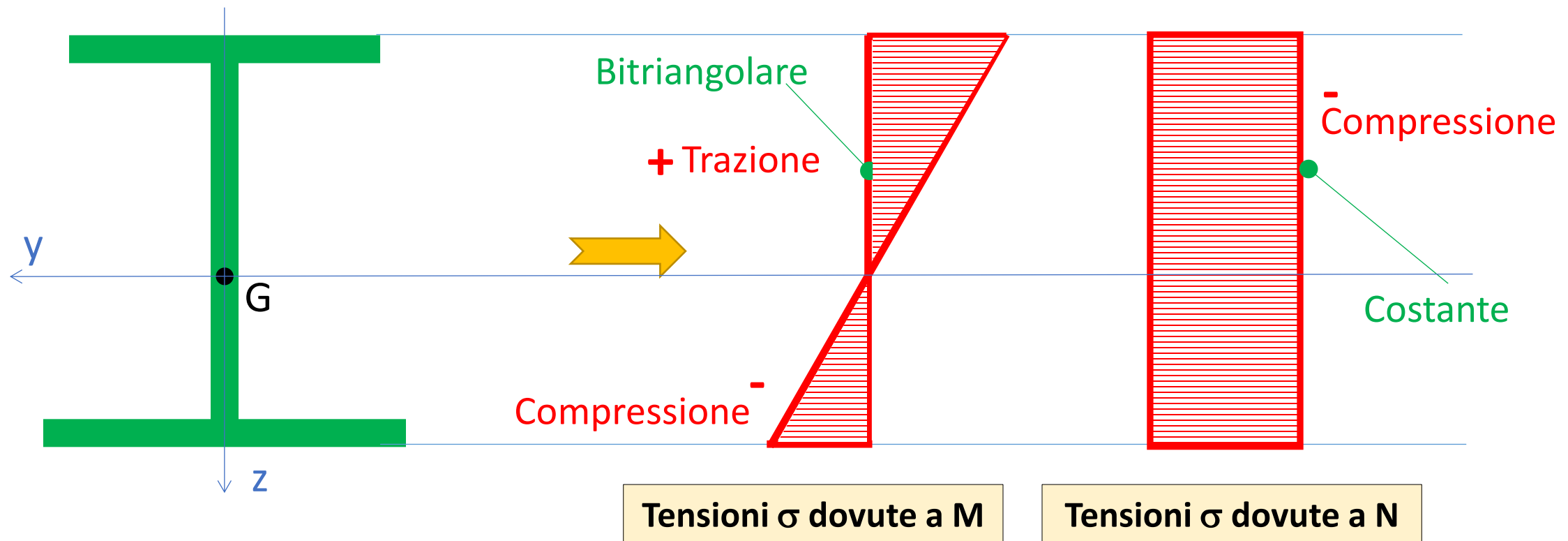
NB: calcolare sempre tutte le distanze utili rispetto ad un unico sistema di riferimento

ESERCIZIO 2

# 5) Diagrammi delle tensioni sulla sezione

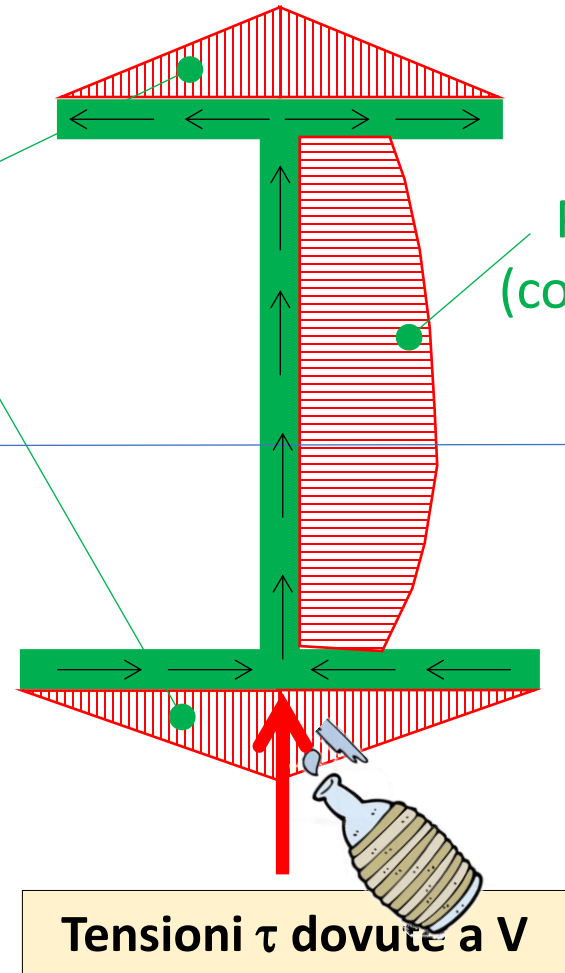
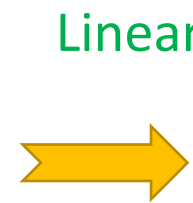
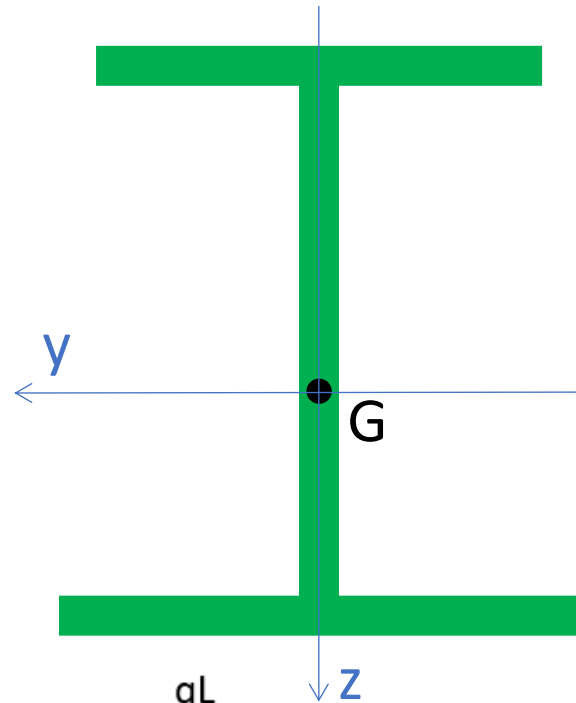
**TESIONI NORMALI  $\sigma$  dovute a M e N**

Diagrammi QUALITATIVAMENTE uguali, per le sezioni  $B^{SX}$  e  $B^{DX}$

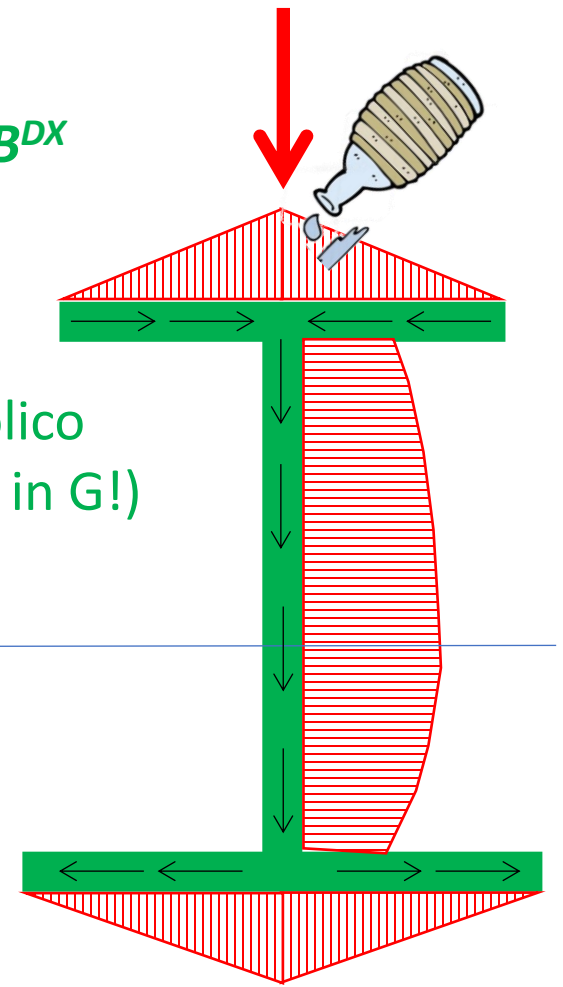


# TESIONI TANGENZIALI $\tau$ dovute a $V$

Diagrammi QUALITATIVAMENTE diversi, per le sezioni  $B^{SX}$  e  $B^{DX}$



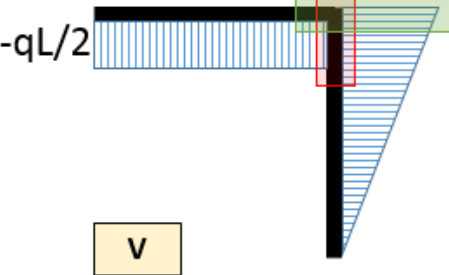
**Sezione  $B^{SX}$**



**Tensioni  $\tau$  dovute a  $V$**

**Sezione  $B^{DX}$**

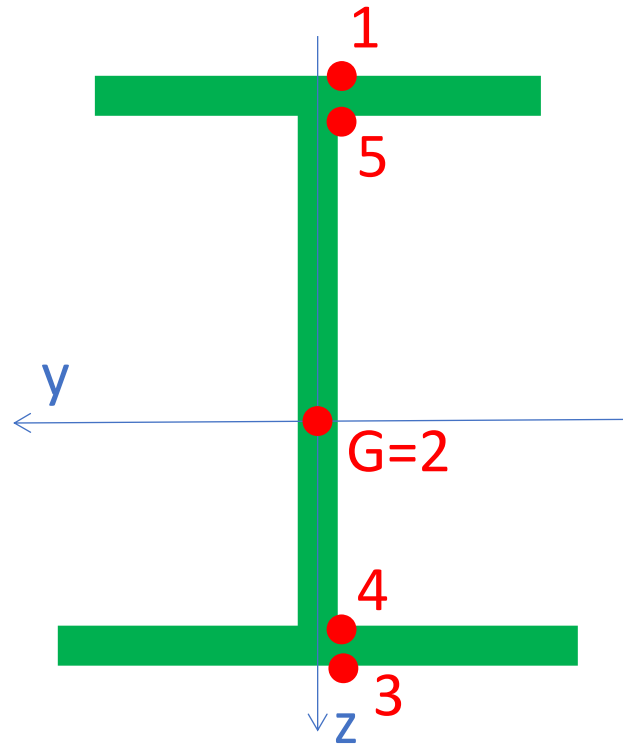
NB: diagrammi anche **QUANTITATIVAMENTE** diversi, perché cambia  $V$  di riferimento!!!



**ESERCIZIO 2**



# Alcune osservazioni da (5)



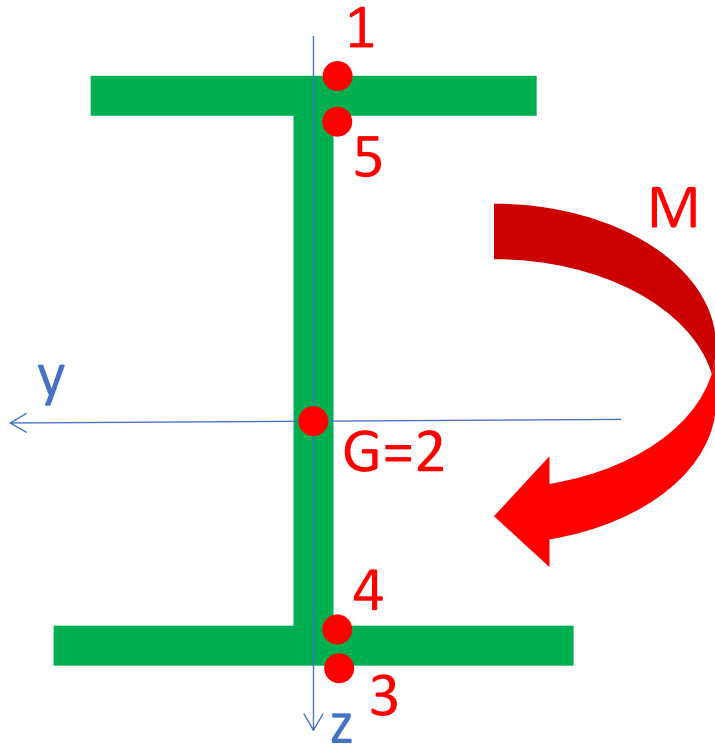
Dall'analisi e verifica della struttura ci si aspetta:

- ✓ tensioni normali massime  $\sigma_{\max}$  nei punti 1 e 3 (dovute a M (massima distanza da G) + N), con  $\tau > 0$  (ma probabilmente di piccola entità)
- ✓ tensioni tangenziali massime  $\tau_{\max}$  del punto 2 (in corrispondenza di G), ma con  $\sigma$  più piccole di 1 e 3 (perché  $\sigma = 0$  dovute a M, resta solo N)
- ✓ tensioni ideali di Von Mises molto elevate nei punti 4 e 5, per effetto di tensioni normali  $\sigma$  elevate (M+N) + presenza di tensioni tangenziali  $\tau > 0$  (anche se queste ultime saranno probabilmente di piccola entità)

I punti da verificare sulla sezione sono gli stessi 5, sia per la sezione  $B^{SX}$  che per la sezione  $B^{DX}$

# (6) Calcolo delle tensioni

TENSIONI NORMALI  $\sigma$   
SEZIONE  $B^{SX}$



Quindi per sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_N = N / A = (-qL) / A = -8.98 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE UNIFORME

Dovute a N

$$\sigma_{M,1} = (M / J_y) \times (-z_G) = 370.7 \text{ MPa}$$

TRAZIONE

Dovute a  $M = -qL^2/2$

$$\sigma_{M,3} = (M / J_y) \times (H - z_G) = -293.46 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE

$$\sigma_1 = \sigma_N + \sigma_{M,1} = -8.98 + 370.7 = 361.72 \text{ MPa}$$

TRAZIONE

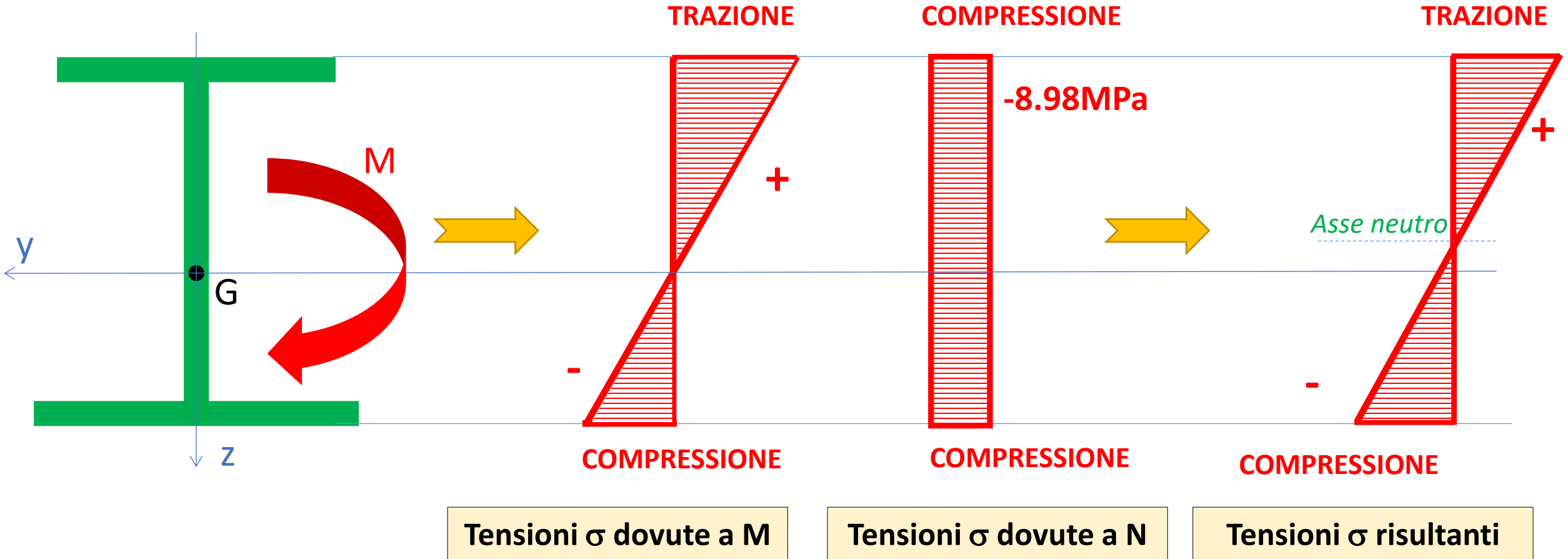
$$\sigma_3 = \sigma_N + \sigma_{M,3} = -8.98 - 293.46 = -302.44 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE

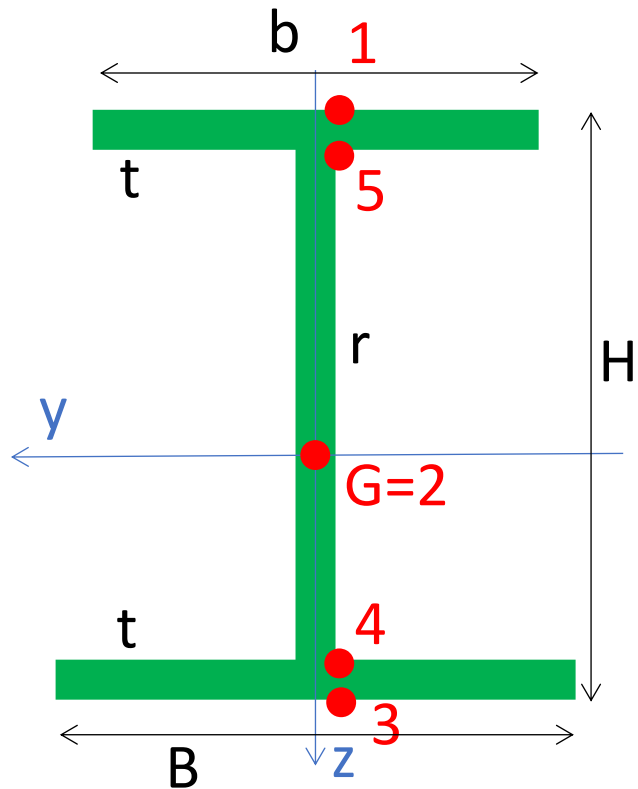
# Riassumendo, per $\sigma$ :

**TENSIONI NORMALI  $\sigma$**   
**SEZIONE  $B^{SX}$**

*Per sovrapposizione degli effetti*



# (6) Calcolo delle tensioni



Con  $V=qL/2$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (V / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= (qL / 2) \times (1 / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= 2.88 \text{ MPa} \end{aligned}$$

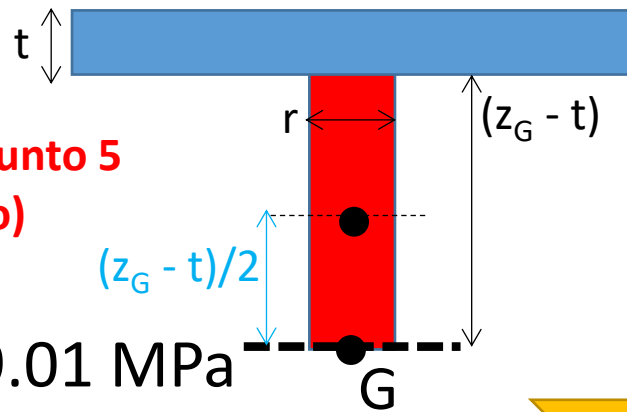
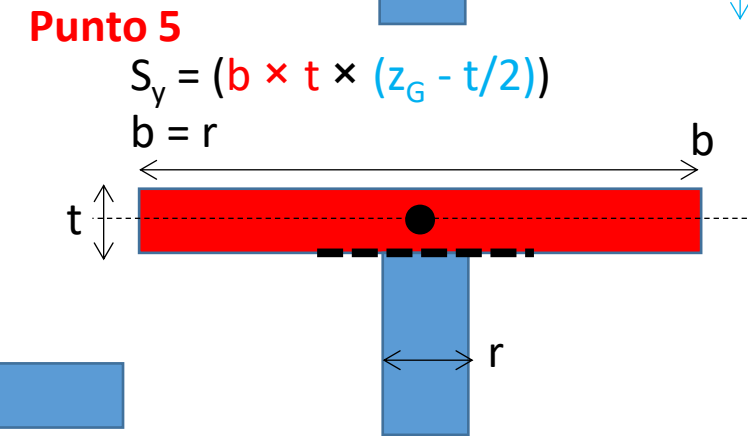
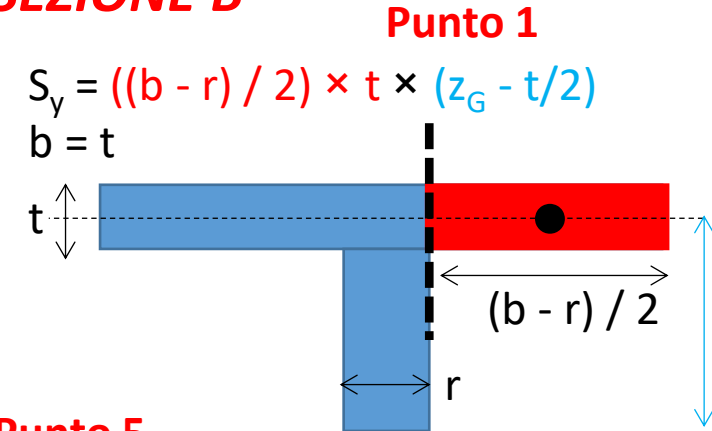
$$\begin{aligned} \tau_5 &= (V / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= (qL / 2) \times (1 / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= 4.72 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**Punto 2:** si calcola come Punto 5 +  $\Delta\tau$  (sull'anima del profilo)

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_5 + \Delta\tau = \\ &= 4.72 + 4.29 = 9.01 \text{ MPa} \end{aligned}$$

## TENSIONI TANGENZIALI $\tau$

### SEZIONE B<sup>SX</sup>



### Punto 2

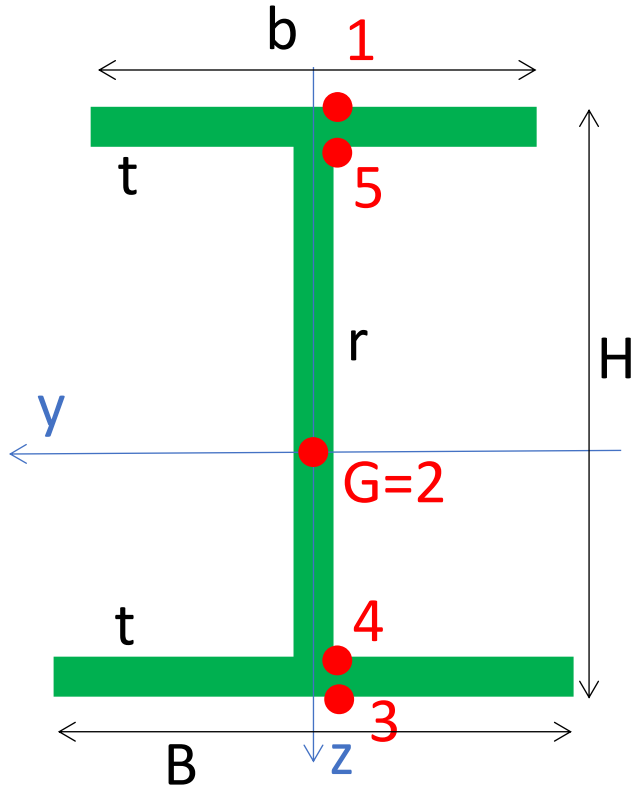
$$\begin{aligned} \Delta\tau &= (V / J_y) \times (\Delta S_y / b) \\ \Delta S_y &= ((z_G - t) \times r) \times ((z_G - t)/2) \\ \text{Quindi } \Delta S_y &= (r \times (z_G - t)^2 / 2) \\ b &= r \end{aligned}$$

Cioè  $\Delta\tau = 4.29 \text{ MPa}$

# (7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

Applichiamo il criterio di Von Mises al punto (1):

**PUNTO 1**  
**SEZIONE B<sup>SX</sup>**

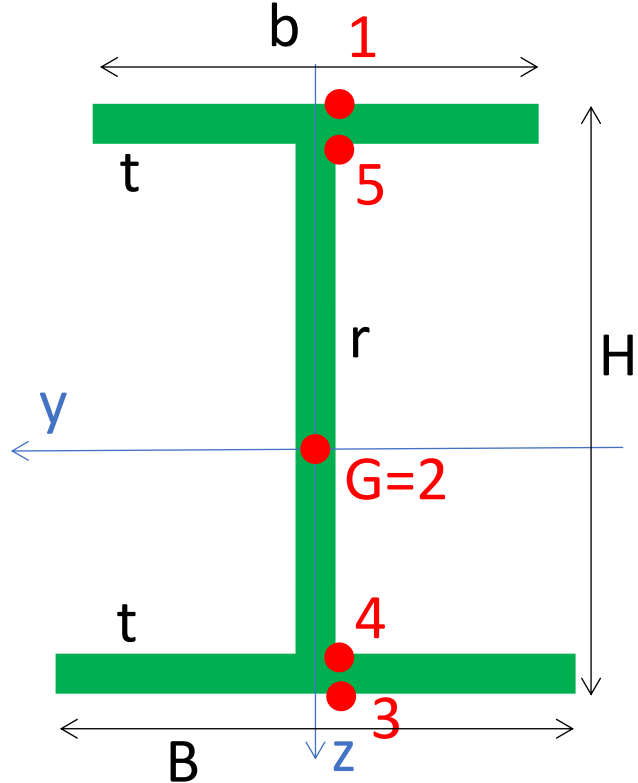


$$\begin{aligned}\sigma_{e,1} = \sigma_{id,1} &= \overset{M+N}{\sigma_1^2} + 3\overset{V}{\tau_1^2} \text{)^{0.5} =} \\ &= (361.72^2 + 3 \times (2.88^2))^{0.5} = \\ &= (130841.35 + 3 \times 8.29)^{0.5} = \\ &= (130866.22)^{0.5} = \\ &= \mathbf{361.75 \text{ MPa}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{NO!}\end{aligned}$$

La struttura **non è verificata**, essendo almeno un punto (1) di una sua sezione resistente (la B<sup>SX</sup>, in questo calcolo) non verificato

# (7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

Se avessimo eseguito la verifica di resistenza per un altro punto critico della sezione:



**PUNTO 5**  
**SEZIONE B<sup>SX</sup>**

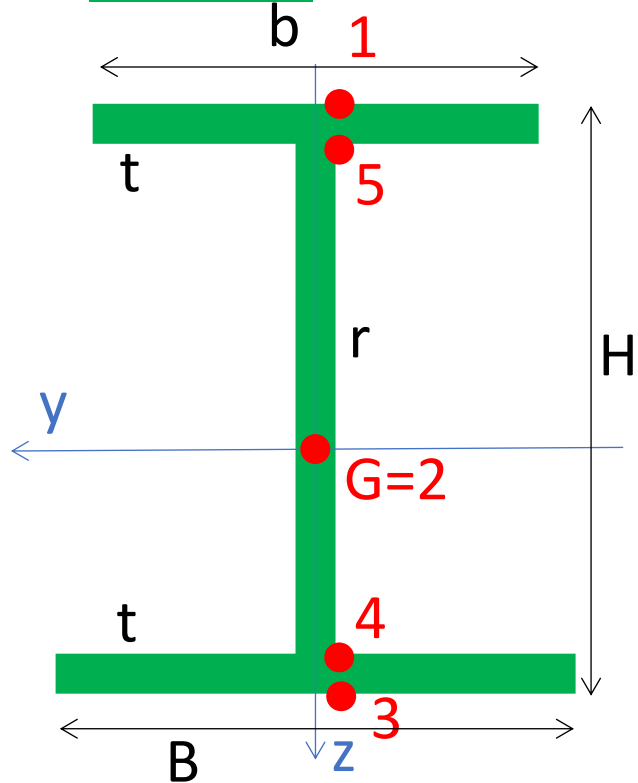
$$\begin{aligned}\sigma_{e,5} = \sigma_{id,5} &= (\overset{M+N}{\sigma_5^2} + 3\overset{V}{\tau_5^2})^{0.5} = \\ &= (337.48^2 + 3 \times (4.72^2))^{0.5} = \\ &= (113892.75 + 3 \times 22.27)^{0.5} = \\ &= (113959.56)^{0.5} = \\ &= \mathbf{337.57 \text{ MPa}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{NO!}\end{aligned}$$

*Si sarebbe comunque concluso che la verifica di resistenza secondo Von Mises non è soddisfatta. Tuttavia, essendo le tensioni  $\sigma$  in (5) minori rispetto a (1), la tensione ideale risultante sarebbe stata inferiore*

La struttura **non è verificata**, essendo almeno un punto (5) di una sua sezione resistente (B<sup>SX</sup>) non verificato

# (7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

E se invece avessimo eseguito la verifica di resistenza in corrispondenza del baricentro della sezione???



**PUNTO 2**  
**SEZIONE B<sup>SX</sup>**

$$\begin{aligned}\sigma_{e,2} = \sigma_{id,2} &= (\overset{M+N}{\sigma_2^2} + 3\overset{V}{\tau_2^2})^{0.5} = \\ &= (0 + 3 \times (9.01^2))^{0.5} = \\ &= (3 \times 81.18)^{0.5} = \\ &= (243.54)^{0.5} = \\ &= \mathbf{15.6 \text{ MPa}}\end{aligned}$$

➔ **OK**

## ATTENZIONE

*Dalla verifica del punto (2) si sarebbe concluso che la verifica di resistenza secondo Von Mises è soddisfatta a livello del baricentro della sezione.*

*Tuttavia, il punto (2) non è quello più critico per la sezione!!!*

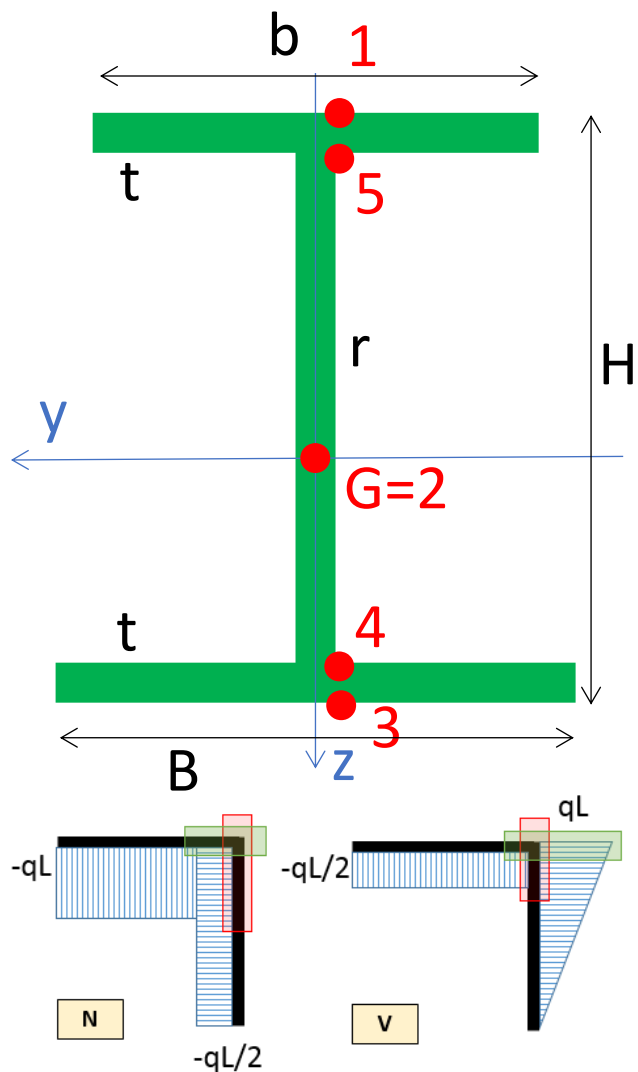
**QUINDI:**

La struttura **non è comunque verificata**, essendo almeno un punto (es. 1 e 5) di una sua sezione resistente (in questo esempio la B<sup>SX</sup>) non verificato

# (6) Calcolo delle tensioni

TENSIONI NORMALI  $\sigma$   
SEZIONE  $B^{DX}$

ATTENZIONE: cosa succede invece nella sezione  $B^{DX}$ ?



Già sappiamo che:

$$\begin{aligned} M^{DX} &= M^{SX} \\ N^{DX} &= N^{SX} / 2 \\ V^{DX} &= -2V^{SX} \end{aligned}$$

Quindi proviamo a stimare alcuni valori di tensione  $\sigma$  (es. nel punto (1)) trascurando gli effetti di V:

$$\sigma_{N,DX} = \sigma_{N,SX} / 2 = -4.49 \text{ MPa} \quad \text{Uniforme}$$

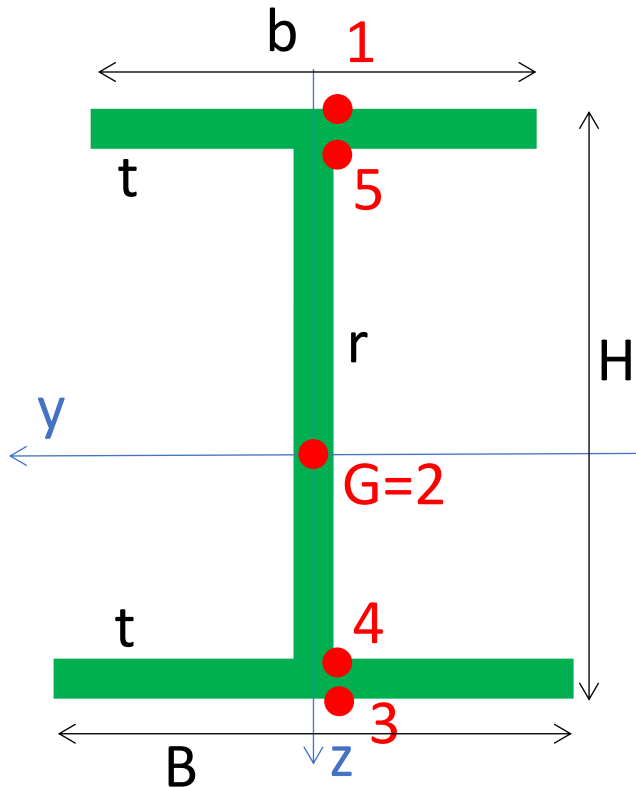
$$\sigma_{M,1,DX} = \sigma_{M,1,SX} = 370.7 \text{ MPa} \quad \text{Traz. Sup.}$$

$$\sigma_{M,3,DX} = \sigma_{M,3,SX} = -293.46 \text{ MPa} \quad \text{Comp. Inf.}$$

La struttura **non è evidentemente verificata**, essendo la sola tensione normale al punto (sia (1) che (3)) superiore alla resistenza del materiale



# (6) Calcolo delle tensioni

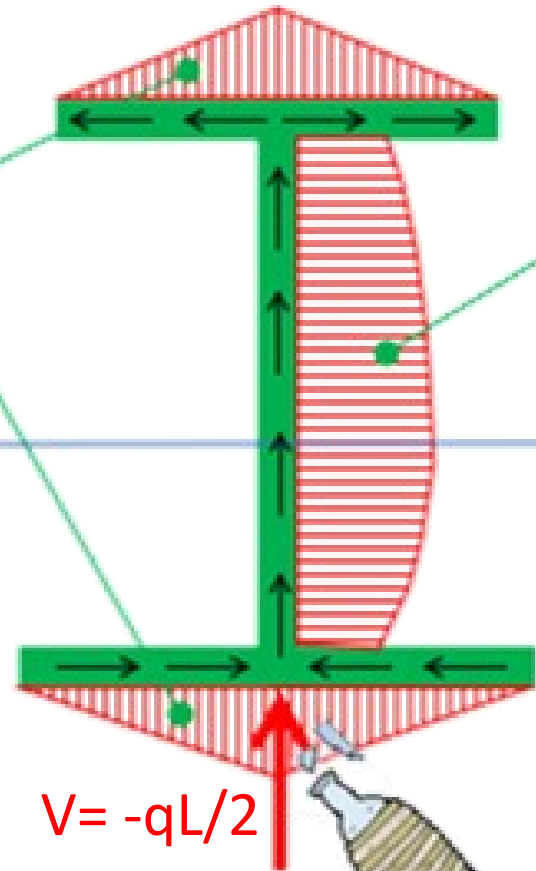


- ✓ Le tensioni tangenziali nella sezione  $B^{DX}$  sono - in modulo - **doppie** rispetto a quanto già calcolato per i punti più significativi della sezione  $B^{SX}$
- ✓ Il flusso di tensioni è opposto

TENSIONI TANGENZIALI  $\tau$   
SEZIONE  $B^{DX}$

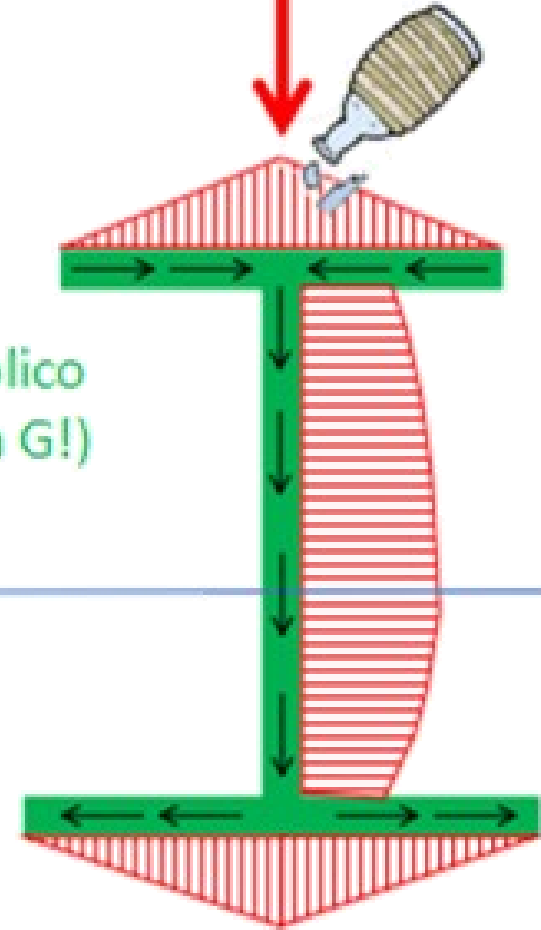
Lineare

Parabolico  
(max in G!)



Tensioni  $\tau$  dovute a  $V$

Sezione  $B^{SX}$



Tensioni  $\tau$  dovute a  $V$

Sezione  $B^{DX}$