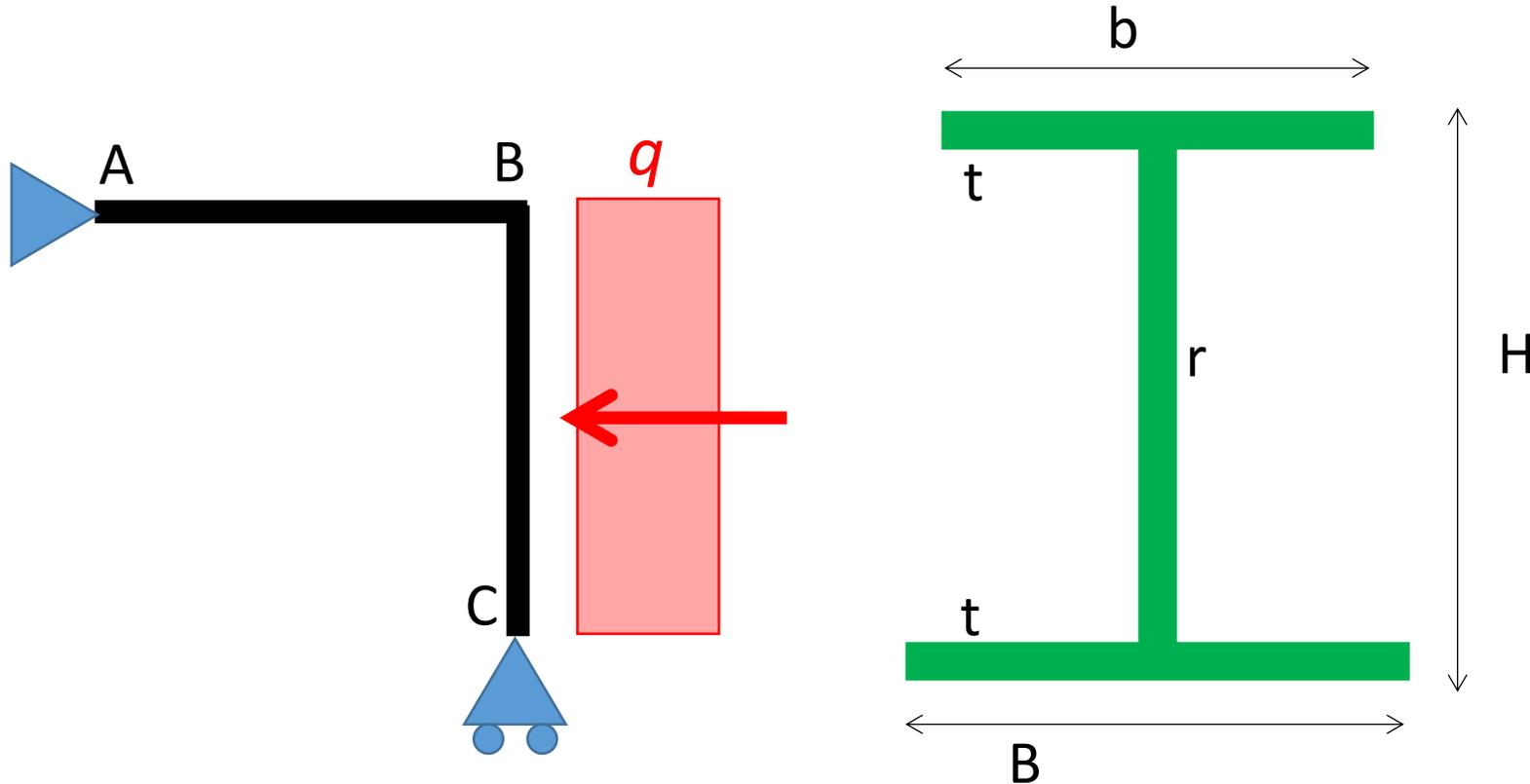




ESERCIZIO 2

VERIFICA DI RESISTENZA DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA IN ACCIAIO

ESERCIZIO 2



DATI

$AB = BC = L = 4 \text{ m}$

$q = 11 \text{ kN/m}$

$H = 200 \text{ mm}$

$B = 140 \text{ mm}$

$b = 80 \text{ mm}$

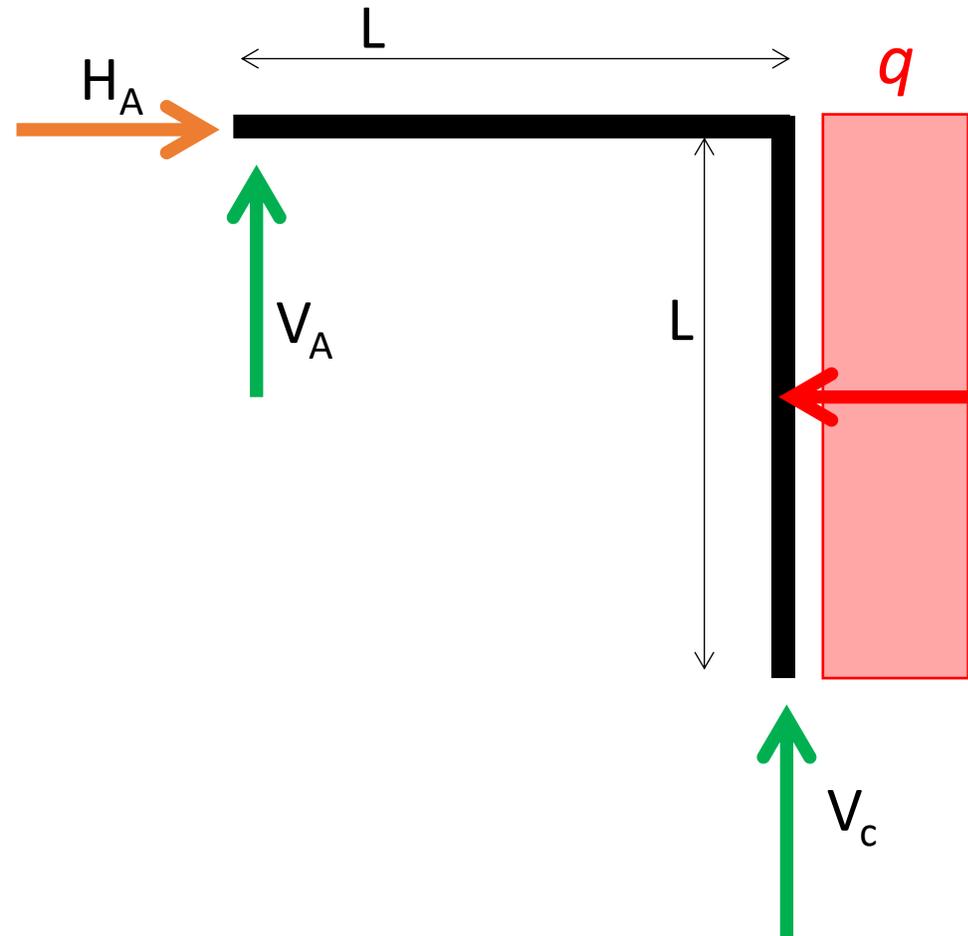
$t = 10 \text{ mm}$

$r = 15 \text{ mm}$

Si risolva lo schema statico assegnato, tracciandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e verificando la sezione più sollecitata.

A tale scopo, si considerino i dati riportati in figura, e che la tensione di snervamento dell'acciaio è $\sigma_y = 275 \text{ MPa}$

1) Reazioni vincolari



(1) Traslazione Orizz.

(2) Traslazione Verticale

(3) Rotazione (A)

REAZIONI VINCOLARI

$$H_A - qL = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = qL$$

$$V_A + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = -V_C$$

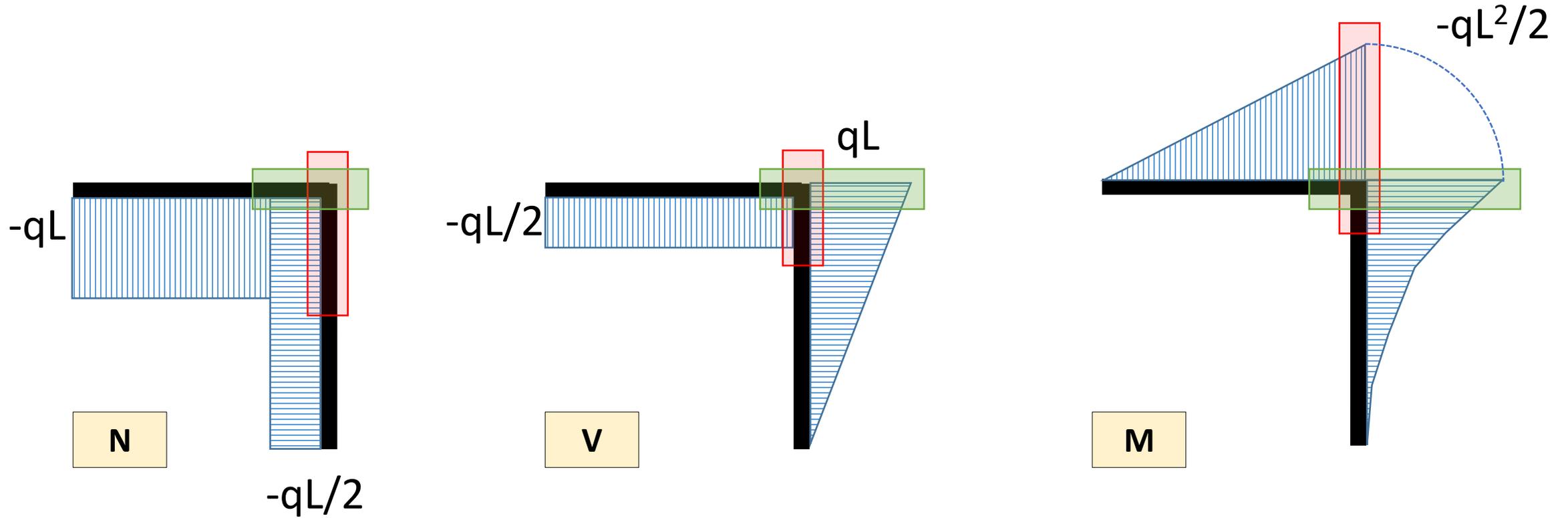
$$-qL \times (L/2) \times + V_C \times L = 0$$

E QUINDI:

$$V_C = qL/2$$

$$V_A = -V_C = -qL/2$$

2) Caratteristiche della sollecitazione



...e 3) sezione più sollecitata

Sezione B^{SX}



$$N = -qL$$

$$V = -qL/2$$

$$M = -qL^2/2$$

Sezione B^{DX}

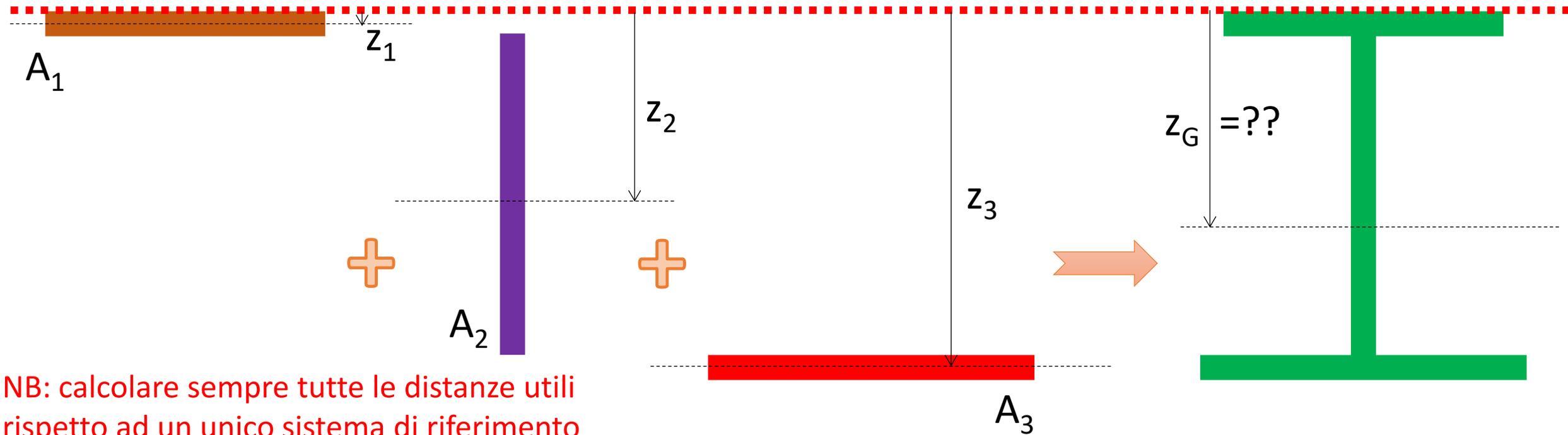


$$N = -qL/2$$

$$V = qL$$

$$M = -qL^2/2$$

4) Proprietà inerziali della sezione

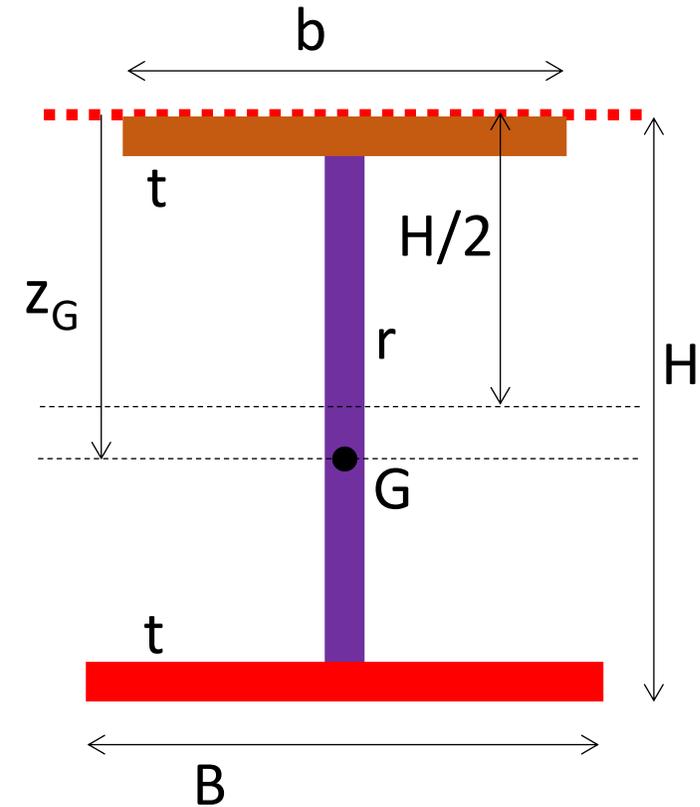


NB: calcolare sempre tutte le distanze utili rispetto ad un unico sistema di riferimento

- (1) Baricentro della sezione (non simmetrica!)
- (2) Momento d'inerzia

4) Proprietà inerziali della sezione

$z_G > H/2 = 100 \text{ mm}$
 Quindi il baricentro G
 è spostato verso il basso



(1)

$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= (b \times t) + (r \times (H - t - t)) + (B \times t) =$$

$$= 4900 \text{ mm}^2$$

$$z_G = S_y / A =$$

$$= ((A_1 \times z_1) + (A_2 \times z_2) + (A_3 \times z_3)) / A =$$

$$= 111.63 \text{ mm}$$

(2)

$$J_y = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + \text{trasporto} =$$

$$= J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + A_1 \times (d_1^2) + A_2 \times (d_2^2) + A_3 \times (d_3^2) =$$

$$= 2.65 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J^{(1)} = (1/12) \times b \times (t^3)$$

$$J^{(2)} = (1/12) \times r \times (H - 2t)^3$$

$$J^{(3)} = (1/12) \times B \times (t^3)$$

$$d_1 = z_G - t/2$$

$$d_2 = (H - 2t)/2 + t - z_G$$

$$d_3 = H - t/2 - z_G$$

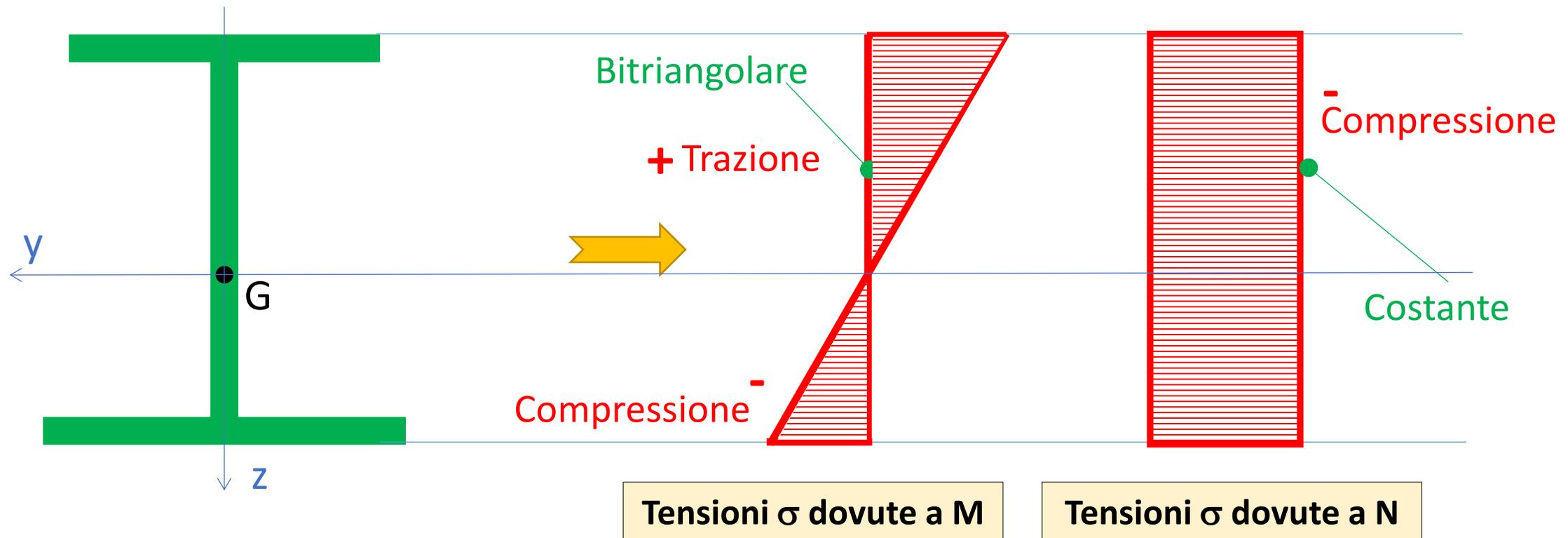
NB: calcolare sempre tutte le distanze utili rispetto ad un unico sistema di riferimento

ESERCIZIO 2

5) Diagrammi delle tensioni sulla sezione

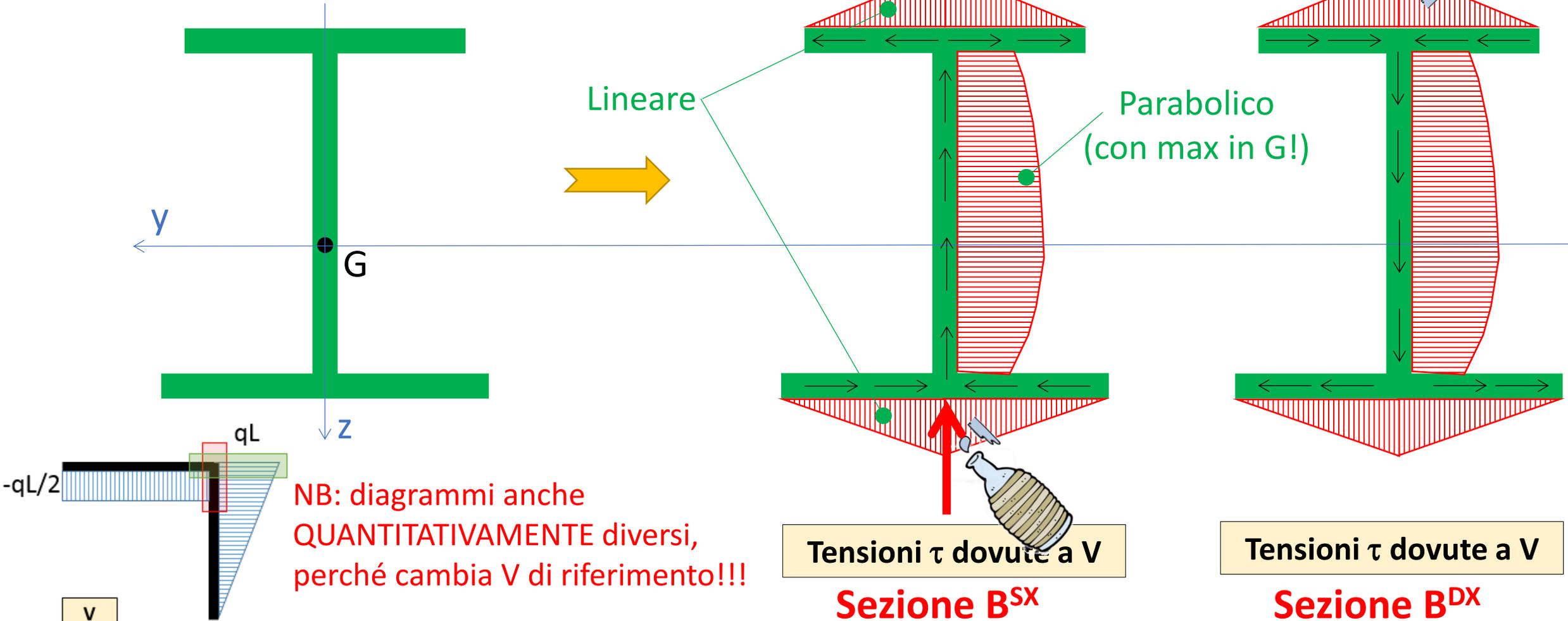
TESIONI NORMALI σ dovute a M e N

Diagrammi QUALITATIVAMENTE uguali, per le sezioni B^{SX} e B^{DX}

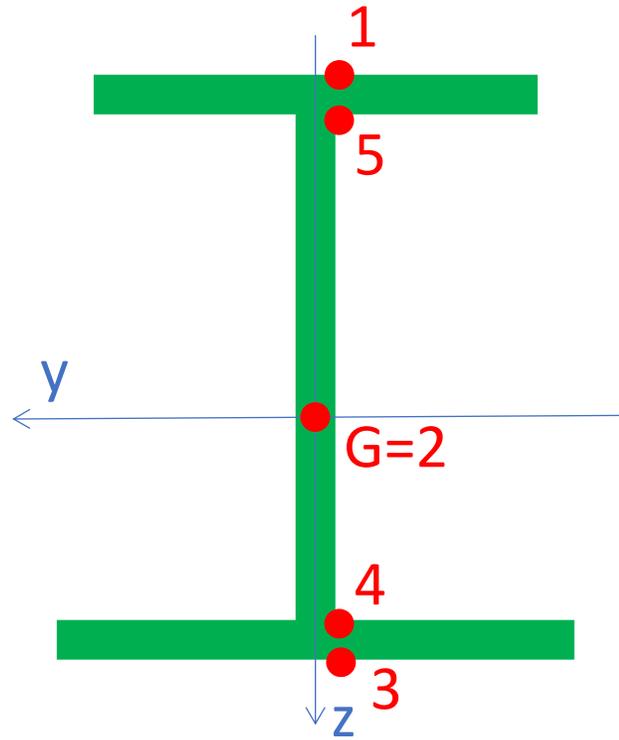


TESIONI TANGENZIALI τ dovute a V

Diagrammi QUALITATIVAMENTE diversi, per le sezioni B^{SX} e B^{DX}



Alcune osservazioni da (5)



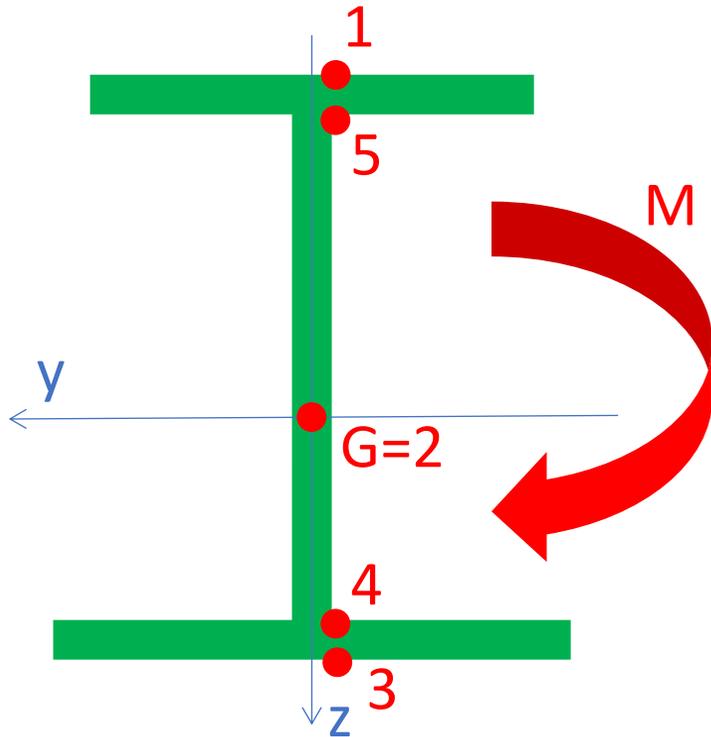
Dall'analisi e verifica della struttura ci si aspetta:

- ✓ tensioni normali massime σ_{\max} nei punti 1 e 3 (dovute a M (massima distanza da G) + N), con $\tau > 0$ (ma probabilmente di piccola entità)
- ✓ tensioni tangenziali massime τ_{\max} del punto 2 (in corrispondenza di G), ma con σ più piccole di 1 e 3 (perché $\sigma = 0$ dovute a M, resta solo N)
- ✓ tensioni ideali di Von Mises molto elevate nei punti 4 e 5, per effetto di tensioni normali σ elevate (M+N) + presenza di tensioni tangenziali $\tau > 0$ (anche se queste ultime saranno probabilmente di piccola entità)

I punti da verificare sulla sezione sono gli stessi 5, sia per la sezione B^{SX} che per la sezione B^{DX}

(6) Calcolo delle tensioni

TENSIONI NORMALI σ
SEZIONE B^{SX}



Quindi per sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_N = N / A = (-qL) / A = -8.98 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE UNIFORME

Dovute a N

$$\sigma_{M,1} = (M / J_y) \times (-z_G) = 370.7 \text{ MPa}$$

TRAZIONE

Dovute a $M = -qL^2/2$

$$\sigma_{M,3} = (M / J_y) \times (H - z_G) = -293.46 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE

$$\sigma_1 = \sigma_N + \sigma_{M,1} = -8.98 + 370.7 = 361.72 \text{ MPa}$$

TRAZIONE

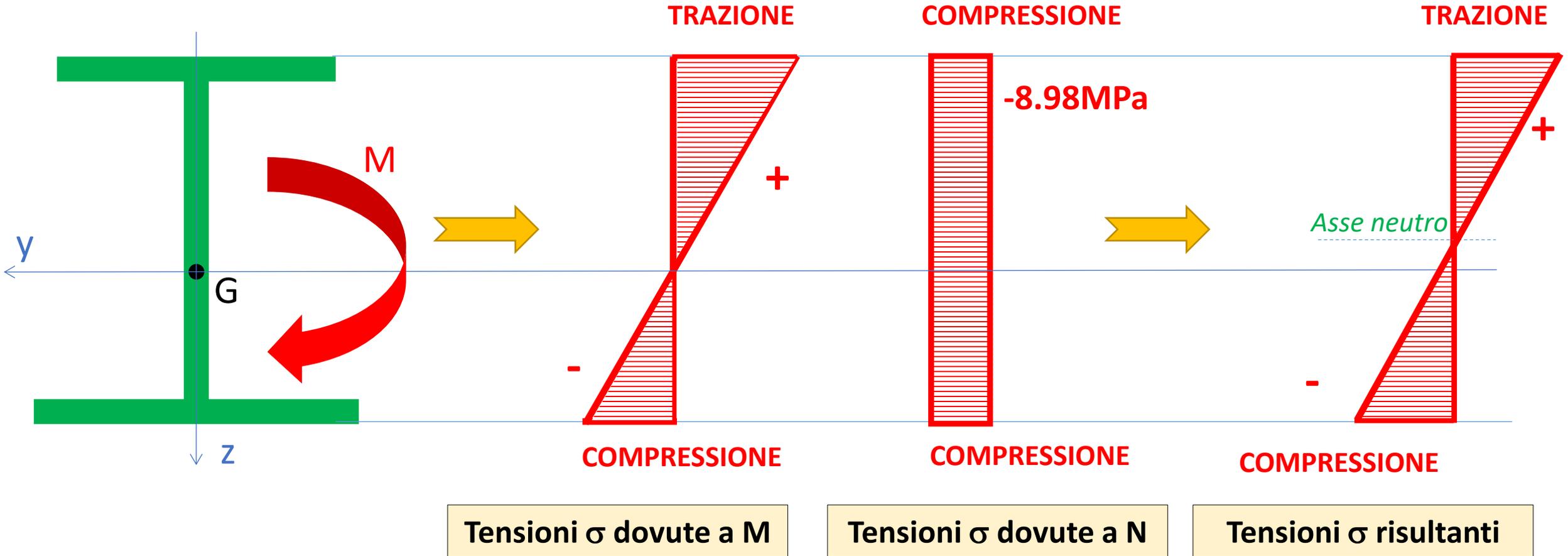
$$\sigma_3 = \sigma_N + \sigma_{M,3} = -8.98 - 293.46 = -302.44 \text{ MPa}$$

COMPRESSIONE

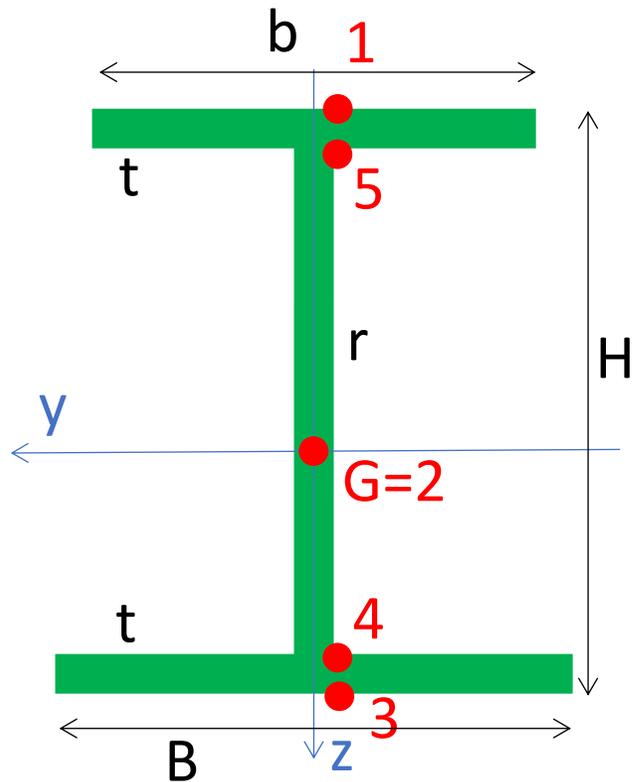
Riassumendo, per σ :

TENSIONI NORMALI σ
SEZIONE B^{SX}

Per sovrapposizione degli effetti



(6) Calcolo delle tensioni



Con
 $V=qL/2$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (V / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= (qL / 2) \times (1 / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= 2.88 \text{ MPa} \end{aligned}$$

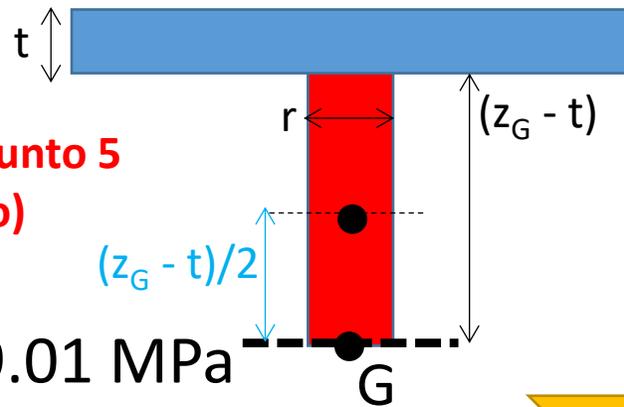
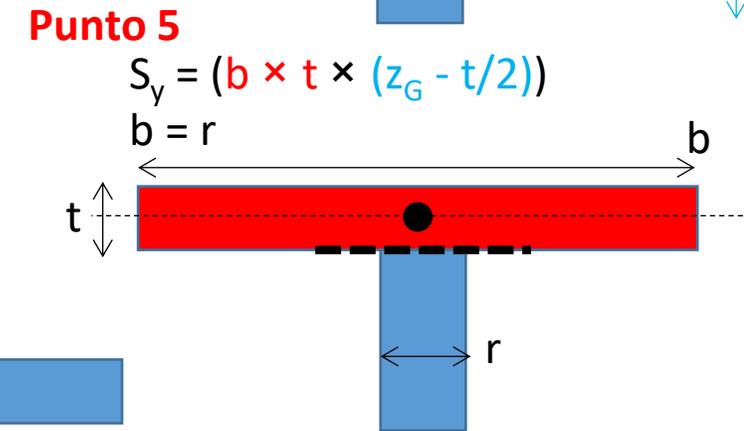
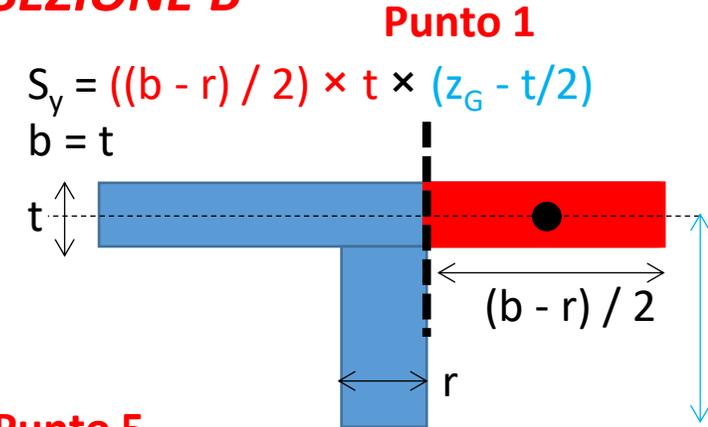
$$\begin{aligned} \tau_5 &= (V / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= (qL / 2) \times (1 / J_y) \times (S_y / b) = \\ &= 4.72 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Punto 2: si calcola come Punto 5
+ $\Delta\tau$ (sull'anima del profilo)

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_5 + \Delta\tau = \\ &= 4.72 + 4.29 = 9.01 \text{ MPa} \end{aligned}$$

TENSIONI TANGENZIALI τ

SEZIONE B^{SX}



Punto 2

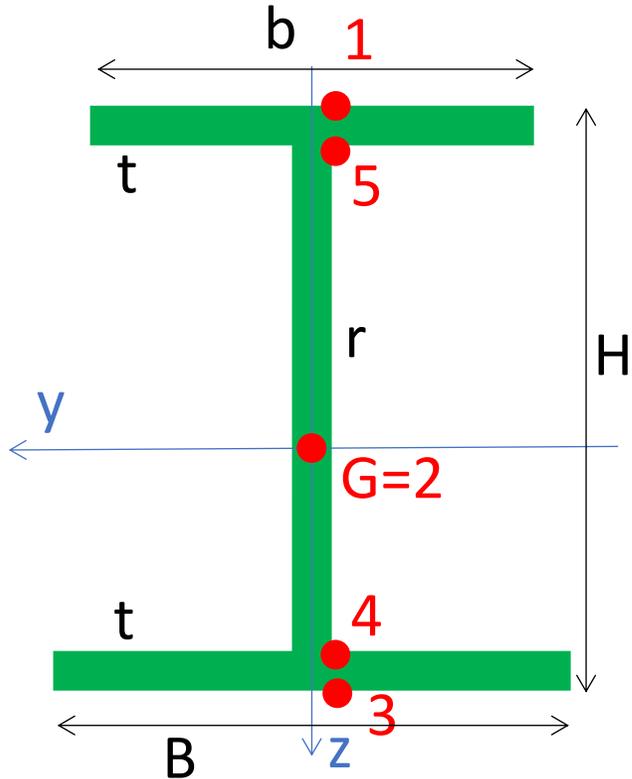
$$\begin{aligned} \Delta\tau &= (V / J_y) \times (\Delta S_y / b) \\ \Delta S_y &= ((z_G - t) \times r) \times ((z_G - t) / 2) \\ \text{Quindi } \Delta S_y &= (r \times (z_G - t)^2 / 2) \\ b &= r \end{aligned}$$

➔ Cioè $\Delta\tau = 4.29 \text{ MPa}$

(7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

Applichiamo il criterio di Von Mises al punto (1):

PUNTO 1
SEZIONE B^{SX}

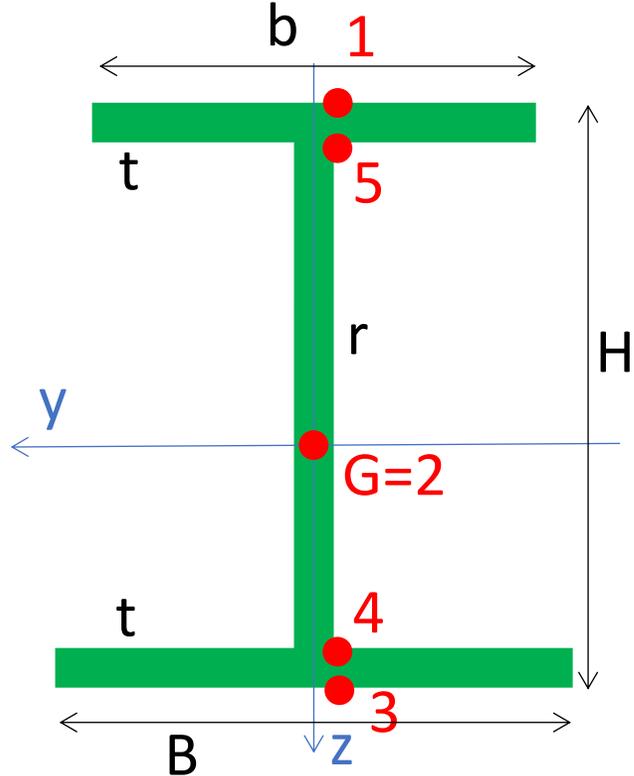


$$\begin{aligned}\sigma_{e,1} &= \sigma_{id,1} = \overset{M+N}{\left(\sigma_1^2 + 3\overset{V}{\tau_1^2}\right)^{0.5}} = \\ &= (361.72^2 + 3 \times (2.88^2))^{0.5} = \\ &= (130841.35 + 3 \times 8.29)^{0.5} = \\ &= (130866.22)^{0.5} = \\ &= \mathbf{361.75 \text{ MPa}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{NO!}\end{aligned}$$

La struttura **non è verificata**, essendo almeno un punto (1) di una sua sezione resistente (la B^{SX}, in questo calcolo) non verificato

(7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

Se avessimo eseguito la verifica di resistenza per un altro punto critico della sezione:



PUNTO 5
SEZIONE B^{SX}

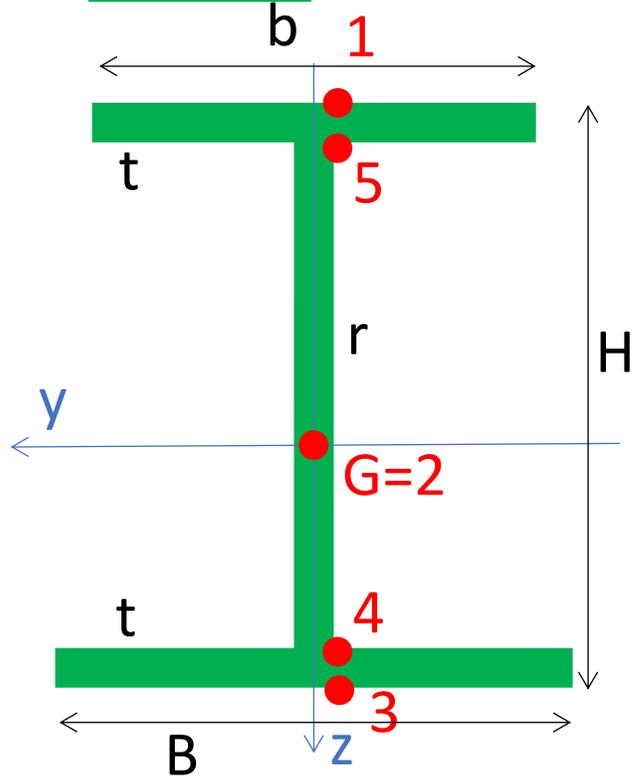
$$\begin{aligned}\sigma_{e,5} = \sigma_{id,5} &= (\overset{M+N}{\sigma_5^2} + 3\overset{V}{\tau_5^2})^{0.5} = \\ &= (337.48^2 + 3 \times (4.72^2))^{0.5} = \\ &= (113892.75 + 3 \times 22.27)^{0.5} = \\ &= (113959.56)^{0.5} = \\ &= \mathbf{337.57 \text{ MPa}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{NO!}\end{aligned}$$

Si sarebbe comunque concluso che la verifica di resistenza secondo Von Mises non è soddisfatta. Tuttavia, essendo le tensioni σ in (5) minori rispetto a (1), la tensione ideale risultante sarebbe stata inferiore

La struttura **non è verificata**, essendo almeno un punto (5) di una sua sezione resistente (B^{SX}) non verificato

(7) Verifiche di resistenza (Von Mises)

E se invece avessimo eseguito la verifica di resistenza in corrispondenza del baricentro della sezione???



PUNTO 2
SEZIONE B^{SX}

$$\begin{aligned}\sigma_{e,2} = \sigma_{id,2} &= (\overset{M+N}{\sigma_2^2} + 3\overset{V}{\tau_2^2})^{0.5} = \\ &= (0 + 3 \times (9.01^2))^{0.5} = \\ &= (3 \times 81.18)^{0.5} = \\ &= (243.54)^{0.5} = \\ &= \mathbf{15.6 \text{ MPa}}\end{aligned}$$

➔ **OK**

ATTENZIONE

Dalla verifica del punto (2) si sarebbe concluso che la verifica di resistenza secondo Von Mises è soddisfatta a livello del baricentro della sezione.

Tuttavia, il punto (2) non è quello più critico per la sezione!!!

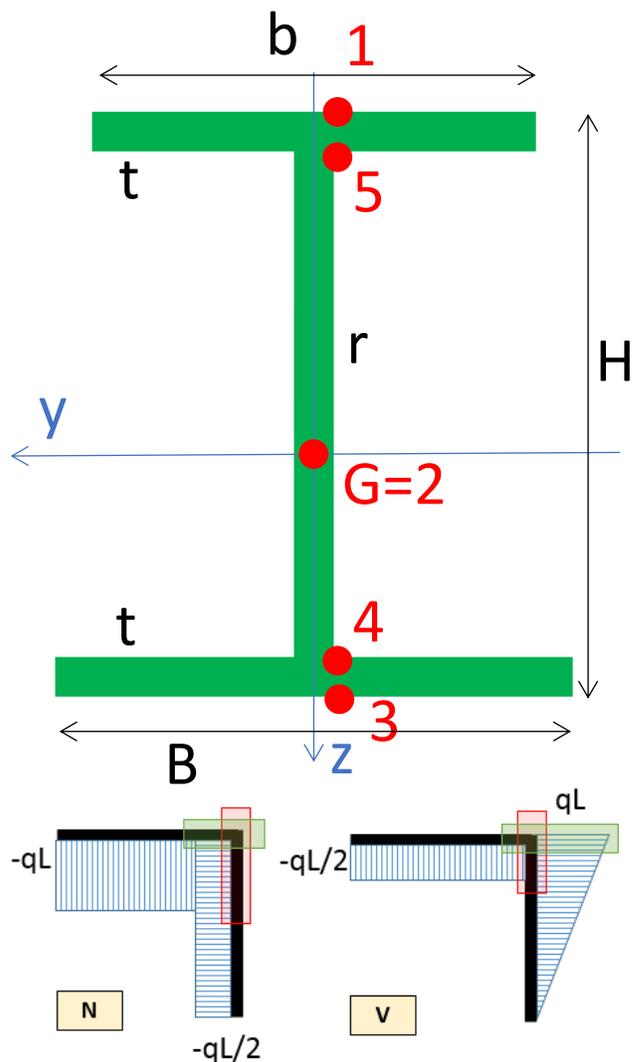
QUINDI:

La struttura **non è comunque verificata**, essendo almeno un punto (es. 1 e 5) di una sua sezione resistente (in questo esempio la B^{SX}) non verificato

(6) Calcolo delle tensioni

TENSIONI NORMALI σ
SEZIONE B^{DX}

ATTENZIONE: cosa succede invece nella sezione B^{DX} ?



Già sappiamo che:

$$\begin{aligned} M^{DX} &= M^{SX} \\ N^{DX} &= N^{SX} / 2 \\ V^{DX} &= -2V^{SX} \end{aligned}$$

Quindi proviamo a stimare alcuni valori di tensione σ (es. nel punto (1)) trascurando gli effetti di V :

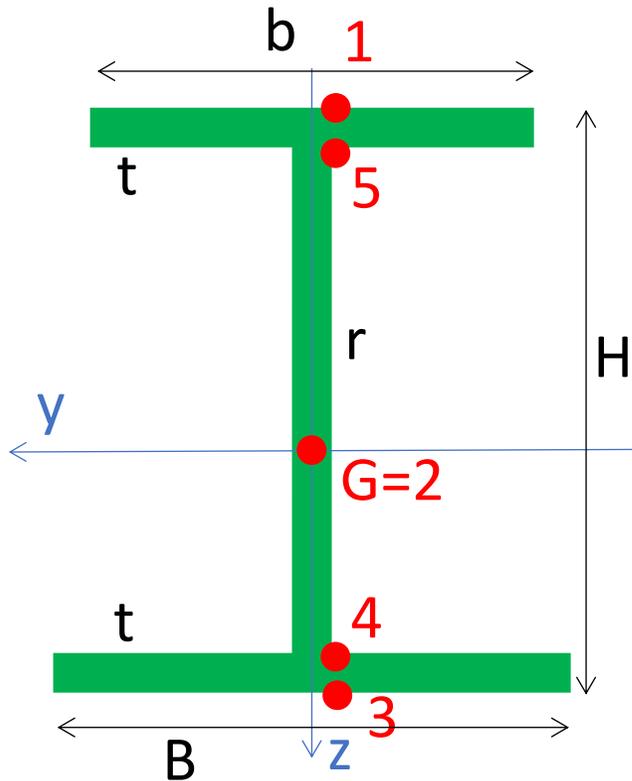
$$\sigma_{N,DX} = \sigma_{N,SX} / 2 = -4.49 \text{ MPa} \quad \text{Uniforme}$$

$$\sigma_{M,1,DX} = \sigma_{M,1,SX} = 370.7 \text{ MPa} \quad \text{Traz. Sup.}$$

$$\sigma_{M,3,DX} = \sigma_{M,3,SX} = -293.46 \text{ MPa} \quad \text{Comp. Inf.}$$

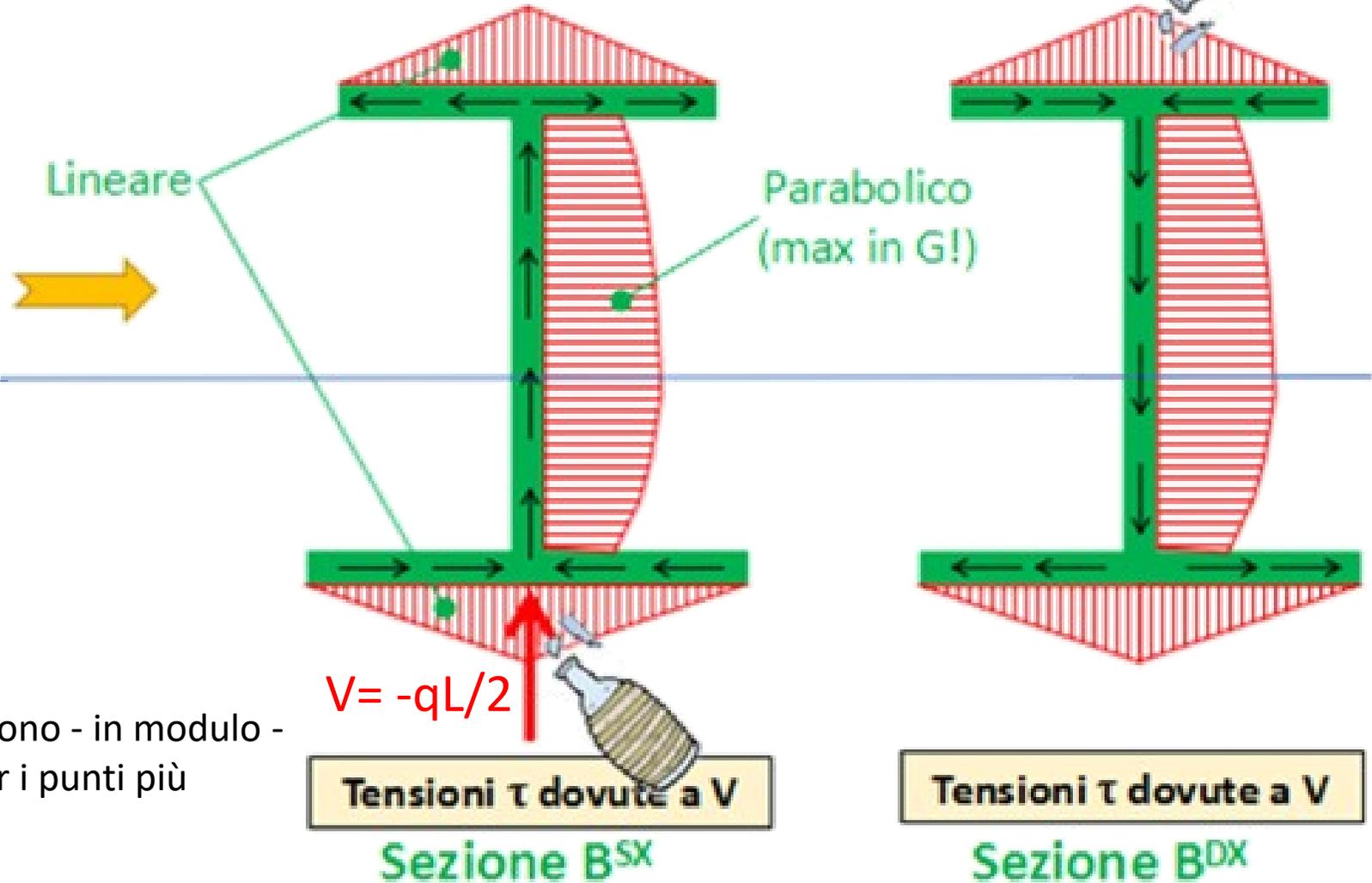
La struttura **non è evidentemente verificata**, essendo la sola tensione normale al punto (sia (1) che (3)) superiore alla resistenza del materiale

(6) Calcolo delle tensioni



- ✓ Le tensioni tangenziali nella sezione B^{DX} sono - in modulo - **doppie** rispetto a quanto già calcolato per i punti più significativi della sezione B^{SX}
- ✓ Il flusso di tensioni è opposto

TENSIONI TANGENZIALI τ
SEZIONE B^{DX}



Tensioni τ dovute a V
Sezione B^{SX}

Tensioni τ dovute a V
Sezione B^{DX}