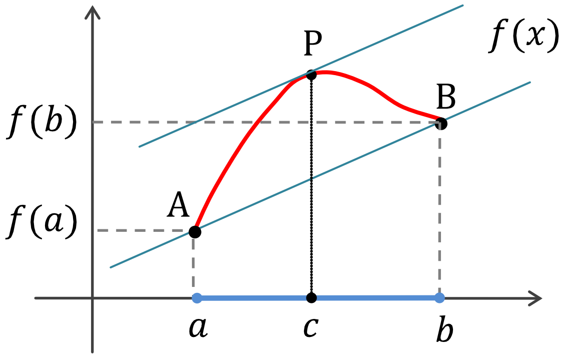
Teorema di Lagrange

enunciato



Se una funzione $f(x)$ è:

- è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- derivabile nei punti interni dell'intervallo]a, b[

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

dimostrazione

$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$	consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x)$

si osservi che:

- $f(x)$ è continua in [a, b] e derivabile nei punti interni per ipotesi
- $f(a)$ e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sono costanti e quindi sono continue e derivabili in tutto $\mathcal{R}$
- $(x - a)$ è un binomio di primo grado e quindi continuo e derivabile in tutto $\mathcal{R}$

verifichiamo che $\varphi(x)$ soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle:

1. $\varphi(x)$ è continua in [a, b] perché è una combinazione lineare di funzioni continue in [a, b]
2. $\varphi(x)$ è derivabile nei punti interni di]a, b[perché è una combinazione lineare di funzioni derivabili in]a, b[
3. calcoliamo $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ cioè:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = \mathbf{0}$$

quindi $\varphi(a) = \varphi(b)$

applicando il teorema di Rolle alla $\varphi(x)$ si ha che esiste almeno un punto c interno all'intervallo]a, b[tale che $\varphi'(c) = 0$

calcoliamo la derivata prima di $\varphi(x)$:

$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ perché $D[f(a)] = 0$ e $D[(x - a)] = 1$

calcoliamo la derivata di $\varphi(x)$ nel punto c e poniamola uguale a zero:

$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ cioè $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ quindi $\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

significato geometrico

da un punto di vista geometrico il teorema di Lagrange afferma che nell'intervallo aperto]a, b[esiste almeno un punto c tale che la retta tangente alla funzione nel punto $P(c, f(c))$ è parallela alla corda passante per i punti A e B (vedi disegno in alto)

in sintesi: si introduce la funzione ausiliaria $\varphi(x)$ e si verifica che essa soddisfa le tre ipotesi del teorema di Rolle. Si applica il teorema di Rolle alla $\varphi(x)$ e si giunge alla tesi del teorema di Lagrange