Polinomio di Taylor.

Annalisa Cesaroni, Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova

20 novembre 2015

Polinomio di Taylor

Dalla teoria della derivazione, sappiamo che se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

ovvero, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$ e quindi,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Polinomio di Taylor

La scrittura

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

dice che in un intorno di x_0 la funzione f si può approssimare con il polinomio di primo grado

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Problema.

Se più in generale la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è differenziabile n volte, esiste un polinomio di grado n che approssima f in un intorno di x_0, ovviamente meglio del polinomio di primo grado sopra indicato $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$?

Formula di Maclaurin

La scrittura

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

nel caso particolare $x_0 = 0$ *diventa*

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + o(x).$$

e si chiama formula di Maclaurin di grado 1*.*

Per la formula di Maclaurin di grado n cercheremo T_n*, polinomio di grado n, tale che più in generale*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$

per $x \to 0$*.*

Formula di Maclaurin

Definizione (Formula di Maclaurin (o Mac Laurin o MLaurine), 1717)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile* n *volte in* 0. *Allora la scrittura*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

è nota come formula di Maclaurin.

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

si chiama polinomio di Maclaurin.

Formula di Maclaurin. Esempio 1.

Esempio

Calcolare il polinomio di Maclaurin di

$$f(x) = e^x$$

di ordine n.

Svolgimento.

Essendo $f^{(k)}(x) = e^x$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *naturalmente* $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ *e quindi da* $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ *ricaviamo*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Formula di Maclaurin. Esempio 1.

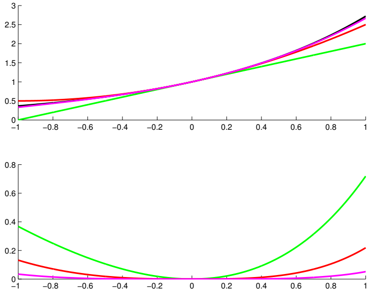

Figura : In alto. La funzione e^x in $[-1, 1]$ (in nero), la formula di Maclaurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Maclaurin di grado 2 (in rosso), la formula di Maclaurin di grado 3 (in magenta). In basso. L'errore assoluto $|e^x - T_k(x)|$ in $[-1, 1]$, relativamente alla formula di Maclaurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Maclaurin di grado 2 (in rosso), la formula di Maclaurin di grado 3 (in magenta).

Formula di Maclaurin. Esempio 1.

Nota.

Notiamo dalla figura che

- *La qualità dell'approssimazione migliora al crescere del grado del polinomio di Maclaurin.*
- *L'approssimazione è buona solo in un intorno di* 0*. L'errore assoluto vicino a* 0 *è piccolo, ma non è così in* $x = 1$*.*

Formula di Maclaurin. Esempio 2.

Esempio

Calcolare il polinomio di Maclaurin di

$$f(x) = \sin(x)$$

di ordine n.

Svolgimento.

Da

$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
$f^{(0)}(x) = \sin(x)$	$f^{(0)}(0) = 0$
$f^{(1)}(x) = \cos(x)$	$f^{(1)}(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$
$\ldots$	$\ldots$

Formula di Maclaurin. Esempio 2.

abbiamo da $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$$

e quindi per $x \approx 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^n).$$

Formula di Maclaurin. Esempio 2.

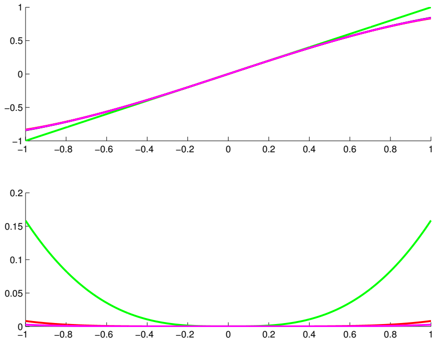

Figura : In alto. La funzione $\sin(x)$ in $[-1, 1]$ (in nero), la formula di Maclaurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Maclaurin di grado 2 (in rosso), la formula di Maclaurin di grado 3 (in magenta). In basso. L'errore assoluto $|\sin(x) - T_k(x)|$ in $[-1, 1]$, relativamente alla formula di Maclaurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Maclaurin di grado 2 (in rosso), la formula

Formula di Maclaurin. Esempio 2.

Nota.

Notiamo dalla figura che

- *La qualità dell'approssimazione migliora al crescere del grado del polinomio di Maclaurin.*
- *L'approssimazione è buona solo in un intorno di* 0. *L'errore assoluto vicino a* 0 *è piccolo, ma non è così in* $x = 1$ *(evidente nel caso* T_1*).*

Formula di Maclaurin. Esercizio.

Esercizio

Mostrare che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Nota.

Valutiamo $\log(1.2) \approx 0.182321556793955$ *tramite*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Grado	*Maclaurin*	*Errore Assoluto*
1	0.200000000000000	0.017678443206045
2	0.180000000000000	0.002321556793955
3	0.182666666666667	0.000345109872712
4	0.182266666666667	0.000054890127288
5	0.182330666666667	0.000009109872712
6	0.182320000000000	0.000001556793955
7	0.182321828571429	0.000000271777474

Formula di Maclaurin. Esercizio.

Nota.

Valutiamo $\log(6) \approx 1.791759469228055$ *tramite*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Grado	*Maclaurin*	*Errore Assoluto*
1	$5.0000\ldots$	$3.2082\ldots$
2	$-7.5000\ldots$	$9.2918\ldots$
3	$34.167\ldots$	$32.375\ldots$
4	$-122.08\ldots$	$123.88\ldots$
5	$502.92\ldots$	$501.12\ldots$

Questa tabella ci dice che ha senso approssimare il $\log(1+x)$ *con la formula di Maclaurin, solo per* $x \approx 0$.

Formula di Taylor.

Definizione (Formula di Taylor, 1715)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile* n *volte in* $x_0 \in (a, b)$*. Allora la scrittura*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

è nota come formula di Taylor di ordine n*, centrata in* x_0*, con resto di Peano.*

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si chiama polinomio di Taylor.

Formula di Taylor.

Teorema

Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in [a,b]$. *Se*

- f *è* n *volte derivabile in* $[a,b]$;
- f *è* $n+1$ *volte derivabile in* $[a,b] \backslash x_0$;
- $f^{(n)}$ *è continua in* $[a,b]$

allora per ogni $x \in [a,b] \backslash x_0$ *esiste* $\xi(x)$ *tra* x *e* x_0 *tale che*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

dove T_n *è il polinomio di Taylor di ordine* n *e centro* x_0 *della funzione* f.

Formula di Maclaurin.

Teorema

Valgono le seguenti formule di Maclaurin:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
- $(1+x)^\alpha = 1+\alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \ldots + \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n + o(x^n)$

  dove per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}$;

Formula di Maclaurin.

- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$;
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$;
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$;
- $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.

Su $o(f(x))$.

Ricordiamo le seguenti

Notazione.

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *e* $f = o(g)$ *allora* f *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Esempio

Si mostra facilmente che

- $x^2 = o(x)$ *per* $x \to 0$;
- $x^5 = o(x)$ *per* $x \to 0$;

Algebra degli $o(f(x))$.

Teorema

Vale la seguente algebra degli o-piccoli, per $x \to 0$:

- $o(x^{\alpha}) \pm o(x^{\beta}) = o(x^{\min(\alpha,\beta)})$;
- $o(k \cdot x^{\alpha}) = o(x^{\alpha})$ *per* $k \in \mathbb{R}$;
- $k \cdot o(x^{\alpha}) = o(x^{\alpha})$ *per* $k \in \mathbb{R}$;
- $x^{\alpha} \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$;
- $o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$;
- $x^{\alpha} = o(x^{\beta})$ *per ogni* $\beta < \alpha$;
- $o(x^{\alpha}) = o(x^{\beta})$ *per ogni* $\beta < \alpha$.

Algebra degli $o(f(x))$.

Traccia.

Per dimostrare gli asserti basta usare le definizioni di $o(x^k)$. *Mostriamo ad esempio che*

$$o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^{\min(\alpha,\beta)})$$

Non è restrittivo supporre $\alpha = \min(\alpha, \beta)$. *Se* $f(x) = o(x^\alpha)$, $g(x) = o(x^\beta)$ *allora*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^\beta} = 0$$

allora da $\beta - \alpha \geq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) \pm g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \pm \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \pm \lim_{x \to 0} \frac{g(x) x^{\beta-\alpha}}{x^\beta} = 0$$

e quindi è provato l'asserto.

Algebra degli $o(f(x))$.

Mostriamo come seconda cosa che

$$o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Se $f(x) = o(x^{\alpha})$, $g(x) = o(x^{\beta})$ *allora*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^{\beta}} = 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \cdot \frac{g(x)}{x^{\beta}} = 0$$

cioè $o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$.

Algebra degli $o(f(x))$.

Mostriamo come terza cosa che

$$o(x^\alpha) = o(x^\beta) \text{ per ogni } \beta < \alpha.$$

Se $f(x) = o(x^\alpha)$ *allora*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$$

Mostriamo che se $\beta < \alpha$ *allora*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0.$$

Infatti se $\beta < \alpha$ *allora se* $\alpha - \beta > 0$ *e*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\beta} = \lim_{x\to 0} f(x) \cdot x^{-\beta} = \lim_{x\to 0} f(x) \cdot x^{\alpha-\beta-\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)x^{\alpha-\beta}}{\alpha} = 0$$

cioè $o(x^\alpha) = o(x^\beta)$ *per ogni* $\beta < \alpha$.

Ordine di infinitesimo.

Definizione

Si dice ordine di infinitesimo di una funzione infinitesima f (per $x \to 0$), quell' $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che per un certo $L \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = L$$

Nota.

Calcolare l'ordine di infinitesimo di f è equivalente a trovare α tale che, per $L \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = L\,x^\alpha + o(x^\alpha).$$

Infatti, dividendo ambo i membri per x^α e passando al limite per $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = L + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha} = L.$$

Calcolo di limite.

Esempio

Si calcoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin(x) + \log(1+x)}{e^x - 1 + x^2}$$

Svolgimento.

Osserviamo che, per quanto noto dalla formula di Maclaurin

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ *e quindi*
  $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^n)$.
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Calcolo di limite.

Di conseguenza, visto che $o(x)/x \to 0$ per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)+\log(1+x)}{e^x-1+x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+(x+o(x^2))+(x+o(x))}{(x+o(x))+o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x^2)+o(x)}{x+o(x)+o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(3+o(x^2)/x+o(x)/x)}{x(1+o(x)/x+o(x)/x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3
\end{aligned}$$

Calcolo di limite.

Nota.

La tecnica consiste nel determinare che il numeratore è del tipo

$$C_1 x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$$

che il numeratore è

$$C_2 x^{\beta} + o(x^{\beta})$$

e quindi calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{C_1 x^{\alpha} + o(x^{\alpha})}{C_2 x^{\beta} + o(x^{\beta})} = \lim_{x \to 0} \frac{C_1 x^{\alpha}}{C_2 x^{\beta}}.$$

Ulteriori sviluppi. Esempi I.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^{5/2}}{5!} + o(x^{5/2})$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$ *e porre* $y = \sqrt{x}$.

Ulteriori sviluppi. Esempi II.

Esempio

Per $x \to 0$, si ha

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ *e porre* $y = x^2$.

Ulteriori sviluppi. Esempi III.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$e^{x^2+1} = e + e \cdot x^2 + \frac{e \cdot x^4}{2} + \frac{e \cdot x^6}{3!} + o(x^6)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$ *e osservare che*

$$e^{x^2+1} = e \cdot e^{x^2} = e \cdot (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)).$$

Nota.

I conti appena fatti richiedono di lavorare con funzioni infinitesime e quindi non si adattano ad oggetti quali $\cos(1+x^3)$ *in un intorno di* 0, *poichè* $\lim_{x\to 0} \cos(1+x^3) = \cos(1) \neq 0$.

Ulteriori sviluppi. Esempi IV.

Esempio

Per $x \to 0$, si ha

$$(\sin(x))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ *e osservare che*

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2 + \left(\frac{x^3}{3!}\right)^2 + (o(x^3))^2 - 2x\frac{x^3}{3!} + 2xo(x^3) - 2\frac{x^3}{3!} \cdot o(x^3) \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^6) - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - o(x^6) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Ulteriori sviluppi. Esercizio svolto.

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}}{\sin(x) - x}$$

Traccia.

E' una forma $0/0$*. Si noti che* $x \to 0^+$*, ma la teoria vale lo stesso (perchè ?). Si vede subito che*

- $\sin(x) - x = -(x^3/6) + o(x^3)$;
- *dallo sviluppo di* $\cos(y) = 1 - (y^2/2) + o(y^2)$ *abbiamo per* $x > 0$, $y = 2\sqrt{x}$

$$\cos(2\sqrt{x}) = 1 - ((2\sqrt{x})^2/2) + o((2\sqrt{x})^2) = 1 - 2x + o(x)$$

Ulteriori sviluppi. Esercizio svolto.

- *dallo sviluppo* $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ *abbiamo*

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(y^3) = 1 - 2x + o(x)$$

Quindi,

$$\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x} = (1 - 2x + o(x)) - (1 - 2x + o(x)) = o(x) - o(x) = o(x)$$

e non si capisce bene cosa sia a meno di infinitesimi

$$\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}.$$

Ulteriori sviluppi. Esercizio svolto.

Andiamo ad un ordine maggiore. Da $\cos(y) = 1 - (1/2)y^2 + (1/4!)y^4 + o(y^4)$ *ricaviamo dopo qualche conto*

- $\cos(2\sqrt{x}) = 1 - 2x + (2/3)x^2 + o(x^2)$
- $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$

da cui

$$\begin{aligned} \cos(2\sqrt{x}) - e^{(-2x)} &= (1 - 2x + (2/3)x^2 + o(x^2)) - (1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)) \\ &= (2/3)x^2 - 2x^2 + o(x^2) = -(4/3)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

e facilmente,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}}{\sin(x) - x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(4/3)x^2 + o(x^2)}{-(x^3/6) + o(x^3)}$$

$$-(4/3)x^2$$

Nota sui limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Nota.

Osserviamo che posto $t = 1/x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0^+} f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Di conseguenza, dopo una opportuna trasformazione, possiamo calcolare con le tecniche introdotte, pure limiti del tipo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Nota sui limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Esempio

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^4}}.$$

Traccia.

Ricordando che in un intorno di 0

$$\sin(t) - t = -(t^3/6) + o(t^3) \Rightarrow \sin(t^2) - t^2 = -(t^6/6) + o(t^6)$$

per $t = 1/x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^4}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2 - \sin(t^2)}{t^4} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(t^6/6) + o(t^6)}{t^4} = 0\end{aligned}$$

Esercizi

Esercizi svolti, I.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3^x - \sin(x + x^2) - 1 + \log(1 + x)}{x \cdot \arctan(x)}$$

Esercizi svolti, I.

Traccia.

E' del tipo $0/0$ *(indeterminato).*

- *Calcoliamo l'espansione del numeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$3^x - \sin(x+x^2) - 1 + \log(1+x) = C_1 x^\alpha + o(x^\alpha).$$

Dagli sviluppi di Maclaurin:

- $3^x = e^{\log(3)x} = 1 + \log(3)x + o(x);$
- $\sin(x+x^2) = (x+x^2) + o(x);$
- $\log(1+x) = x + o(x);$

e quindi

$$\begin{aligned} 3^x &- 1 - \sin(x+x^2) + \log(1+x) \\ &= \log(3)x + o(x) - (x+x^2) + o(x) + (x + o(x)) \\ &= \log(3)x + o(x). \end{aligned}$$

Esercizi svolti, I.

- *Calcoliamo l'espansione del denominatore. Da* $x^a o(x^b) = o(x^{a+b})$ *e* $\arctan(x) = x + o(x)$

$$x \cdot \arctan(x) = x(x + o(x)) = x^2 + xo(x) = x^2 + o(x^2)$$

Quindi il limite vale

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(3)x + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = +\infty.$$

Esercizi svolti, II.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^3 - \sin(x)}{\log(1 + x^3)}$$

Esercizi svolti, II.

Traccia.

E' del tipo $0/0$ *(indeterminato).*

- *Calcoliamo l'espansione del numeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$x + 2x^3 - \sin(x) = C_1 x^\alpha + o(x^\alpha).$$

Sappiamo che $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$*; e quindi*

$$\begin{aligned} x + 2x^3 - \sin(x) &= x + 2x^3 - (x - x^3/6 + o(x^3)) \\ &= 2x^3 + x^3/6 + o(x^3) = (13/6)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Esercizi svolti, II.

- *Calcoliamo l'espansione del denumeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$\log(1+x^3) = C_2 x^\beta + o(x^\beta).$$

Da $\log(1+y) = y + o(y)$ *abbiamo per* $y = x^3$

$$\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 2x^3 - \sin(x)}{\log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(13/6)x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = 13/6$$

Esercizi svolti, III.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

Esercizi svolti, III.

Traccia.

E' del tipo $0/0$ *(indeterminato).*

- *Calcoliamo l'espansione del numeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$\log(1+x) - \sin(x) = C_1 x^{\alpha} + o(x^{\alpha}).$$

Sappiamo che

  - $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$;
  - $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$;

e quindi

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \sin(x) &= (x - x^2/2 + o(x^2)) - (x - x^3/6 + o(x^3)) \\ &= -x^2/2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Esercizi svolti, III.

- *Calcoliamo l'espansione del denumeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$1 - \cos(x) = C_2 x^{\beta} + o(x^{\beta}).$$

Da $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ *abbiamo*

$$1 - \cos(x) = x^2/2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2/2 + o(x^2)} = -1.$$

Esercizi svolti, IV.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - \cos(x)}{\sin(x^2)}$$

Esercizi svolti, IV.

Traccia.

E' del tipo $0/0$ *(indeterminato).*

- *Calcoliamo l'espansione del numeratore. Notiamo che*

$$e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - \cos(x) = e^{\frac{x^2}{x^3+1}} - \cos(x).$$

e mostriamo che $exp(x^2/x^3+1) - \cos(x) = C_1 x^\alpha + o(x^\alpha)$.

Sappiamo che

  - $e^y = 1 + y + o(y)$ *implica per* $y = \frac{x^2}{x^3+1}$
$$e^{\frac{x^2}{x^3+1}} = 1 + \frac{x^2}{x^3+1} + o(\frac{x^2}{x^3+1});$$
  - $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$;

e quindi essendo $o(\frac{x^2}{x^3+1})) = o(x^2)$ *(perchè ?)*

$$\begin{aligned} e^{\frac{x^2}{x^3+1}} - \cos(x) &= (1 + \frac{x^2}{x^3+1} + o(\frac{x^2}{x^3+1})) + (1 - x^2/2 + o(x^2)) \\ &= \frac{2x^2 + (x^3+1)x^2}{2(x^3+1)} + o(x^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Esercizi svolti, IV.

- *Calcoliamo l'espansione del denumeratore, ottenendo un risultato del tipo*

$$\sin(x^2) = C_2 x^\beta + o(x^\beta).$$

Da $\sin(y) = y + o(y)$ *abbiamo per* $y = x^2$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - \cos(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^2+(x^3+1)x^2}{2(x^3+1)} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 3/2.$$

Esercizi.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi e/o con la regola de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{e^x - x - cosh(x)}$$

Traccia.

Mostrare che

$$\sin(x) - \sinh(x) = -x^3/3 + o(x^3)$$

$$e^x - x - cosh(x) = x^3/6 + o(x^3)$$

e quindi il limite vale -2.

Esercizi.

Esercizio

Mostrare che, al variare di α,

$$L_\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{27x^5 + log(1+x^7)}{\sqrt{1+x^8} - 1 + \alpha \sin^5(x)}$$

vale $27/\alpha$ *se* $\alpha \neq 0$, $+\infty$ *se* $\alpha = 0$.

Esercizio

Mostrare che,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{x \log(x)} = 0$$

Esercizi.

Esercizio

Mostrare che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \log(x) + x^3 \sin(1/x)}{2^x - 1} = 0.$$

Esercizi.

Esercizio

Calcolare, per ogni valore reale del parametro α, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - \sin(\alpha x) - 1 + x^3}{1 - \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(1+x)}$$

Esercizio

Determinare l'ordine di infinitesimo di $x\sin(x) - x^2$, cioè per quale α minimo si abbia

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(x) - x^2}{x^\alpha} \neq 0.$$

Calcolare quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(x) - x^2}{(1-\cos(x))x}$$

Esercizi.

Esercizio

Calcolare,il valore dei parametri α, β reali affinchè la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)+\cos(x)-e^{x^2/2}}{2x}, & x > 0 \\ 2\alpha\, e^x - 3\,\beta\, x, & x \leq 0 \end{cases}$$

- *sia continua in $\mathbb{R}$:*
- *sia derivabile in $\mathbb{R}$.*

Esercizi.

Esercizio

Calcolare, per ogni valore reale del parametro α, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x + x^2) - x}{x^\alpha - \sin(x^2)}$$

Esercizio

Calcolare, per ogni valore reale del parametro α, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \tan(x^3) - e^{x^3}}{(e^{x^2} - 1)x^\alpha}$$