

20 Novembre

Ieri se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato

se $\mathcal{D} = \{ \text{l'insieme delle decomposizioni } \Delta \text{ di } [a, b] \}$

se una decomposizione Δ e' il dato di

$$\Delta \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$se \quad S(\Delta) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$s(\Delta) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

abbiamo definito

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \{ s(\Delta) \}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}} \{ S(\Delta) \}$$

Abbiamo dimostrato che $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$

ed abbiamo detto che f e' integrabile per Darboux

$$se \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

In quel caso il loro comune valore viene denotato

con $\int_a^b f(x) dx$ che viene detto integrale di

Darboux di f in $[a, b]$

Esempio $[a, b]$

1) $f(x) \equiv c$. Abbiamo visto che $\forall \Delta$

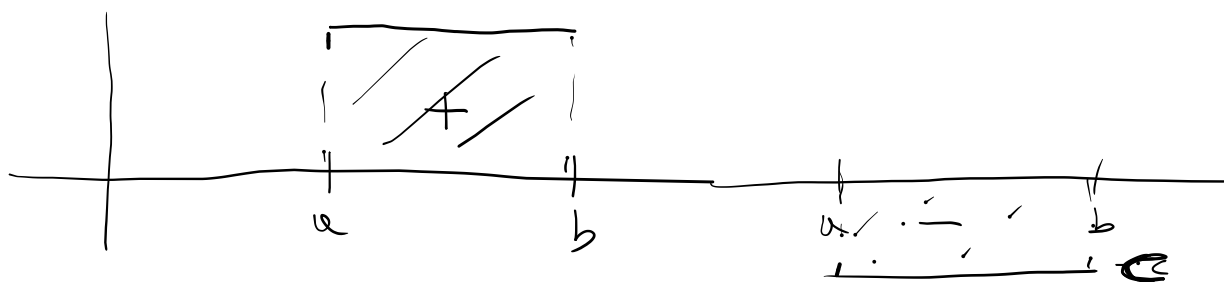
$$S(\Delta) = c(b-a)$$

$$s(\Delta) = c(b-a)$$

$$\int_a^b c \, dx = \inf \{ S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \} = \\ = \inf \{ c(b-a) \} = \boxed{c(b-a)}$$

$$\int_a^b c \, dx = \sup \{ s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \} \\ = \sup \{ c(b-a) \} = \boxed{c(b-a)}$$

Concludiamo che la funzione costante c è integrabile
con $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$



$$2) \quad D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$[a, b]$

$$\int_a^b D(x) dx = \inf \left\{ S(\overset{b-a}{\Delta}) : \Delta \in \mathcal{D} \right\} \\ = \inf \{ b-a \} = b-a$$

$$\int_a^b D(x) dx = \sup \left\{ s(\overset{0}{\Delta}) : \Delta \in \mathcal{D} \right\} \\ = \sup \{ 0 \} = 0$$

$0 \neq b-a \Rightarrow D(x)$ non è integrabile
per Darboux in alcun intervallo $[a, b]$.

Teorema Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato.
Le seguenti proposizioni sono equivalenti.

- 1) f è integrabile in $[a, b]$ per Darboux
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta_\varepsilon \text{ t.c.}$
 $0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$

Dim. Dividiamo la dimostrazione in due parti

Dapprima occupiamo 1) come ipotesi e dimostriamo 2)

Successivamente 1) 2) " " 1) 1)

Parte 1 1) $\Rightarrow$ 2)

Assumiamo f integrabile. Cioè

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$

$$\text{Siccome } \int_a^b f(x) dx = \inf \{ S(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \}$$

$$\text{segue che } \exists \Delta_1 \text{ t.c. } \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Siccome } \int_a^b f(x) dx = \sup \{ s(\Delta) : \Delta \in \mathcal{D} \}$$

$$\text{segue che } \exists \Delta_2 \text{ t.c. } \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta_2) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Qui } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta_2) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Siccome esiste Δ_3 che è un raffinamento sia di Δ_1 che di Δ_2 si ha

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta_2) \leq s(\Delta_3) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_3) \leq S(\Delta_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq S(\Delta_3) - s(\Delta_3) < \varepsilon$$

$$\text{poniamo } \Delta_\varepsilon = \Delta_3$$

Ora dimostriamo 2) $\Rightarrow$ 1)

Supponiamo che io vedo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta_\varepsilon \text{ t.c. } 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

so che si ha quanto segue

$$s(\Delta_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_\varepsilon) & s(\Delta_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x) dx \\ -\int_a^b f(x) dx \leq -s(\Delta_\varepsilon) & -s(\Delta_\varepsilon) \geq -\int_a^b f(x) dx \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon)$$

$$\text{Abbiamo dimostrato } 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow f \text{ è integrabile}$$

Teorema Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona
allora è integrabile in $[a, b]$.

Dim Ci limitiamo al caso delle funzioni crescenti

Δ_n è la ripartizione di $[a, b]$ in n intervalli
di lunghezza $\frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$x_1 - x_0 = x_1 - a = \frac{b-a}{n}$$

$$x_1 = \frac{b-a}{n} + a$$

$$x_2 - x_1 = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} + a + \frac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \frac{b-a}{n} + a$$

Per induzione $x_j = j \frac{b-a}{n} + a, \quad j=0, \dots, n$

$$x_n = \cancel{j} \frac{b-a}{n} + a = b - a + a = b$$

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j)$$

$$s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_{j-1})$$

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j) - \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_{j-1})$$

$$= \left(\frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_n) \right) - \left(\frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_1) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_{n-1}) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} f(x_n) - \frac{b-a}{n} f(x_0) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

$$\forall n \geq 1$$

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Per tanto $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \quad t.c.$

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \varepsilon$$

Se scelgo un qualsiasi $n > N_\varepsilon$ allora

trovo in Δ_n che soddisfa la proprietà 2) delle
terme cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta_\varepsilon \quad t.c. \quad 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_n \quad \text{con } n > N_\varepsilon$$

$L[a, b] = \{ \text{insieme delle funzioni integrabili in } [a, b] \}$

Teorema $C^0([a, b]) \subseteq L[a, b]$

Non lo dimostriamo.

Teorema $C^1([a, b]) \subseteq L[a, b]$

($C^1([a, b])$ è l'insieme delle funzioni con derivata continua in $[a, b]$)

Dim Sia $f \in C^1([a, b])$. Allora $f' \in C^0([a, b])$

e $|f'| \in C^0([a, b])$. Per Weierstrass so che $\exists M \geq 0$

t.c. $0 \leq |f'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

Verifichiamo ora che per ogni $x_1 < x_2$ in $[a, b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1| \quad *$$

Segue dal Lagrange perché so che $\exists c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1)$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| |x_2 - x_1| \leq M |x_2 - x_1|$$

Δ_n

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j^M) \quad \text{dove } x_j^M \in [x_{j-1}, x_j] \text{ è un punto di massimo di } f|_{[x_{j-1}, x_j]}$$

$$s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j^m) \quad \text{dove } x_j^m \in [x_{j-1}, x_j] \text{ è un punto di minimo di } f|_{[x_{j-1}, x_j]}$$

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j^M) - \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j^m)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} (f(x_j^M) - f(x_j^m))$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} |f(x_j^M) - f(x_j^m)|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} K \underbrace{|x_j^M - x_j^m|}_{\leq \frac{b-a}{n}}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \frac{(b-a)^2}{n^2} K =$$

$$= n \frac{(b-a)^2}{n^2} K = \frac{(b-a)^2}{n} K$$

$$0 \leq \underbrace{S(\Delta_n) - s(\Delta_n)}_{\downarrow n \rightarrow +\infty} \leq \frac{(b-a)^2 K}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } n > N_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \varepsilon$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta_\varepsilon \text{ t.c. } 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

Come Δ_ε poter prendere un Δ_n per $n > N_\varepsilon$.

Teorema 1) Siano $f, g \in L[a, b]$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

allora $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2) $f, g \in L[a, b]$ allora $f \cdot g \in L[a, b]$.

(Attenzione! non è

~~$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$~~

Theorem $f \in L[a, b] \Rightarrow |f| \in L[a, b]$

e i hw

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$