

Dirac quantization condition

Consideriamo un MONOPOLO MAGNETICO, cioè oggetto che è sorgente di un campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$\text{t.c.} \quad \int_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m$$

↑
"carica magnetica"

→ modifica di legge di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Di solito qta è considerata "non negoziabile". Infatti, se $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ \vec{B} non può essere scritto come $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ e \vec{A} è necessario per la descrizione quantistica di una particella elettricam. carica in campo magnetico.

↳ qto non è propriamente vero: possiamo definire \vec{A} su tutti i pti diversi del glo in cui sta q_m e MQ è ben definita (ved. DIRAC MONOPOLE)

Vediamo come def. questo camp \vec{A} . Innanzitutto escludiamo

l'origine dal dominio di $\vec{A}(x)$ (like gauge fields sourced by electric charge)

$$\vec{A}: \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}_{\text{some non-trivial topology}} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

some non-trivial topology

Prendiamo camp \vec{A} con $A_\phi^N = \frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$ (o) $A_r = 0 = A_\theta$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

it does not depend on r

$$= \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2}$$

(o) è singolare a $\theta = \pi$, cioè al polo sud.

La connessione $A_\phi^S = -\frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$ è regolare a $\theta = \pi$, ma sing. a $\theta = 0$

Come possiamo dare una connessione ben definita su tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

↳ notiamo che $\bar{A}^N = \bar{A}^S + \bar{\nabla} \omega$, che sono gauge equiv.

↳ per $\theta \neq 0, \pi$ (dove almeno una delle due connessioni è mal definita)

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \omega \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{q_m \phi}{2\pi}$$

permette di "incollare" le due connessioni

È lecita qta transf. di gauge?

La funzione ω non è single-valued, è un problema?

Sotto gauge transf. $\psi \mapsto e^{iq_e \omega} \psi$ ← se ψ ha carica elettrica q_e
 qto dev'essere single-valued

avviene se $\frac{q_e q_m \cdot 2\pi}{2\pi} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Dirac
quantiz.
condition

$$q_e \cdot q_m \in 2n\mathbb{Z}$$

(Matem.: costruzione di un $U(1)$ -bundle non-triviale; n è chiamato 1st Chern number.)

1st Hooft Lines in Elettromagnetismo

Prendiamo un monopolo che muove attorno C in $\mathbb{R}^{3,1}$. Per ogni S^2 che circonda C abbiamo

$$\int_{S^2} \bar{B} \cdot d\bar{E} = q_m \quad (*) \quad q_m \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{DIRAC QUANTIZATION})$$

↑
se carica elettrica normalizzata a essere intera.

Affinché A_μ soddisfi qta equazione, bisogna imporre condizioni al bordo ($r \rightarrow 0$) singolari per A_μ .

Definiamo l'operatore "t Hooft line" $T[C]$ imponendo che i campi su cui facciamo il Path Integral soddisfino la condizione (*).

↑

def. inusuale μ un operatore, ma pto ci permette comunque di calcolare le funt. di correlat di $T[C]$ con quei altri op. O

$$\langle T[C] O \rangle = \int_{A \text{ satisfy } (*)} O(A) DA$$

t Hooft lines in Yang-Mills

Consideriamo l'algebra di Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

- Un elemento $H \in \mathfrak{h}$ genera un sottogruppo $U(1) \subset G$.
- Prendiamo una base $\{H^1, \dots, H^r\} \equiv \overline{\mathfrak{h}}$ di \mathfrak{h} . Ad ogni generatore \bar{H}^I è associato un sottogruppo $U(1)$.

- Per ognuno di quei gruppi $U(1)$ posso pensare di prendere un monopolo di carica q_m^I $I=1, \dots, r$, con campo magnetico

$$\bar{B}^I = \frac{q_m^I}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \leadsto \text{ posso def. 't Hooft line op. n'chiedendo che la sua inserzione nel P.I. produca qto andamento per } r \rightarrow 0.$$

\bar{B}^I è embeddato in Field strength non-ab. come

$$B_i = \epsilon_{ijk} F^{jk} = \epsilon_{ijk} F^{ajk} t^a \quad \uparrow \quad = \epsilon_{ijk} F^{Ijk} H^I = \underline{B_i^I H^I}$$

Consideriamo F in Cartan subalg.

$$\rightarrow \bar{B}^I H^I = \frac{1}{4\pi r^2} \sum q_m^I H^I$$

- Prese parziali in rep R di G , le loro cariche sotto $U(1)_{H^I}$ sono date da $\mu_l^I \equiv \mu_l(H^I)$ $l=1, \dots, \dim V_R$.

Def. $\bar{\mu} = (\mu^1, \dots, \mu^r)$

- Ripetiamo step del caso abeliano per la soluz. di monopolo:

\rightarrow abbiamo che i due emisferi di S^2 sono incollati se

$$\omega^I = \frac{q_m^I \phi}{2\pi} \text{ genera una buona transf. di gauge.}$$

Qto avviene se $e^{i\omega^I H^I}$ è ben definita quando agisce su ogni rep. R di G .

Cioè se $e^{i \frac{q_m^I \phi}{2\pi} \mu_R^I}$ è periodica in $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ ($\bar{\mu}_R = n_e \bar{\mu}_{e,R}$)

\rightarrow Dirac quantization condition:

$$\bar{q}_m \cdot \bar{\mu}_R \in 2\pi \mathbb{Z} \quad (*)$$

\Rightarrow dati i pesi $\bar{\mu}_R \in \Lambda_w$ le cariche magnetiche permesse sono solo quelle che soddisfano (*).

Es. $SU(2)$. L'algebra di Cartan è 1dim $\rightarrow U(1) \subset SU(2)$.

- I pesi sono $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

- La carica magn. deve soddisfare $q_m \mu = 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

- Siccome la minima carica elettrica è $1/2$ (corrispondente alla rep. fondamentale), allora $q_m \in 4\pi\mathbb{Z}$.

I pesi e le roots hanno la proprietà

$$\frac{2\bar{\alpha} \cdot \bar{\mu}}{\bar{\alpha}^2} \in \mathbb{Z} \quad (\#)$$

• Usiamo qta proprietà per risolvere la Dirac quantization cond., cioè $\bar{q}_m \cdot \bar{\mu} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \bar{\mu} \in \Lambda_w(\mathfrak{g})$.

• Definiamo "co-root" $\bar{\alpha}^\vee \equiv \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2} \leadsto$ spaziano un reticolo che chiamiamo $\Lambda_{\text{co-root}}(\mathfrak{g})$

• $(\#) \Rightarrow \bar{\alpha}^\vee \cdot \bar{\mu} \in \mathbb{Z} \quad \forall \bar{\alpha}^\vee \in \Lambda_{\text{co-root}}(\mathfrak{g}) \text{ e } \bar{\mu} \in \Lambda_w(\mathfrak{g})$.

↳ Le cariche magnetiche stanno in:

$$\bar{q}_m \in 2\pi \Lambda_{\text{co-root}}$$

Qta condizione è detta
"GNO quantization cond."
↑
Goddard-Nuyts-Olive

Note: $\Lambda_{\text{co-root}}(\mathfrak{g})$ può essere visto come il root lattice di un'algebra di Lie \mathfrak{g}^\vee : $\Lambda_{\text{co-root}}(\mathfrak{g}) = \Lambda_{\text{root}}(\mathfrak{g}^\vee)$.

Per le algebre ADE vale $\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{g}$!

$SU(N)$ vs $SU(N)/\mathbb{Z}_N$

$SU(2)$ vs $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$

- Wilson lines labelled da reps R di G .
- 't Hooft lines " da elem. di $\Lambda_{\text{co-root}}(G) \subset \Lambda_w(G^v)$

Consideriamo YM con $G = SU(N)$.

A_μ e $Adj \rightarrow$ non sentono trasf. del centro $\mathbb{Z}_N \subset SU(N)$

$$\mathbb{Z}_N = \{ e^{2\pi i k/N} \mathbb{1} \mid k=0,1,\dots,N-1 \}$$

Abbiamo lo stesso spettro di bosoni di gauge se $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$.

In generale, ci sono DIVERSE TEORIE di GAUGE con gruppo

$$G = SU(N)/\mathbb{Z}_p \quad \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_N \quad \leftarrow \text{Gruppi di Lie con stessa alg. di Lie.}$$

La differenza è sottile:

- l'ordine dip. dall'alg. di Lie, che è la stessa per i diversi gruppi;
- $\langle O \dots O \rangle$ con O op. locali sono le stesse nelle diverse teorie \rightarrow i correlatori di op. locali non permettono di distinguere le teorie.

Vediamo le WILSON LINES: esse sono labelate da reps di G .

- Le rep di $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ sono un sottoinsieme di qle di $SU(N)$

\rightarrow ogni rep che trasforma in maniera non triviale sotto \mathbb{Z}_N è proibita (due elem. equivalenti non possono agire in maniera diversa)

\hookrightarrow qto limita il numero di Wilson lines.

Se abbiamo meno rep., stiamo escludendo weights $\vec{\mu}$ e quel. aumentano il numero di cariche magnetiche ammissibili.

In particolare per $su(N)$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^v$ cioè $\Lambda_{\text{co-root}} = \Lambda_{\text{root}}$

$G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ $\bar{\mu}$ stanno in $\Lambda_{\text{root}} \Rightarrow \bar{q}_m$ stanno ora in Λ_w

• C'è una corrispondenza 1 a 1 tra reps e pli in $\Lambda_w(\mathfrak{g})/\Lambda_w$ dove W è il Weyl group (un gruppo discreto che agisce su \mathfrak{H}^* e che è dato per ogni alg. di Lie).

• Inoltre $\Lambda_w(\mathfrak{g})/\Lambda_{\text{root}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}_N$
 \uparrow
centro

↓

I pesi (mod Weyl) che non stanno nel root lattice possono essere labelati da un intero $z^e \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

→ per qti ci sono WL, ma non TL in $SU(N)$

Analogamente per $SU(N)/\mathbb{Z}_N$, i pesi a cui posso associare TL ma non WL sono labelati da $z^m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Prendiamo come es. $SU(6)$; qui posso fare diverse scelte di gruppo di gauge

$SU(6)$ $\bar{\mu} \in \Lambda_w$ $\bar{q}_m \in \Lambda_{\text{root}}$

$SU(6)/\mathbb{Z}_2$
 $SU(6)/\mathbb{Z}_3$ } $\bar{\mu} \in \Lambda_e$ $\bar{q}_m \in \Lambda_m$

$SU(6)/\mathbb{Z}_6$ $\bar{\mu} \in \Lambda_{\text{root}}$ $\bar{q}_m \in \Lambda_w$

Qui non ho che un reticolo e' incluso nell'altro, ma in entrambi ci sono pli che non appartengono all'intersezione

Per es $SU(6)/\mathbb{Z}_2$: $z^e = \{0, 2, 4\}$ $z^m = \{0, 3\}$ e posso fare operatori con (z^e, z^m) combinando WL e TL ops.

Are \mathbb{Z}_N labels related to QUANTUM NUMBERS?
(i.e. charges under some g)

Yes : 1-form symmetry

Extra: Angolo θ e WITTEN EFFECT ↙ da leggere a fine corso

Un θ -termine genera una carica elettrica per un monopolo.

↳ Witten effect

$$q = \frac{e\theta}{2\pi}$$

← Nota che per $\theta = 2\pi$, $q = e$
e posso considerare bound state di monopoli + positrone e ottenere un monopolo scarica elettricamente.

⇓

Quindi $\theta \in]0, 2\pi[$ un monopolo è sempre carico anche elettricamente

Witten effect due to the fact that a monopole generates some bound cond. at its location \rightarrow this produces effect if we have a bound term in \mathcal{L} .

↓
Torniamo a 't Hooft line operators.

Dato un line op. con cariche (z^e, z^m) , la presenza del θ -term shifta la carica elettrica:

$$\theta \mapsto \theta + 2\pi \Rightarrow (z^e, z^m) \mapsto (z^e + z^m, z^m) \quad (*)$$

- Per $G = SU(N)$, (*) mappa il reticolo di line ops su se stesso.
- Per $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$, (*) cambia lo spettro dei line ops.

⇒ la teoria con $G = \text{SU}(N)/\mathbb{Z}_N$ cambia.

Lo spettro ritorna su se stesso quando lo shift è
 $\theta \mapsto \theta + 2\pi N$

In altre parole $\theta \in [0, 2\pi N[$

Un modo di capire che $\theta \in [0, 2\pi[$ in $\text{SU}(N)$ YM
è che $\int FF^*$ è quantizzato b.c.

$$e^{-S_\theta} = e^{i\theta n} \quad \underline{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \text{P.l. periodico in } \theta \rightarrow \theta + 2\pi.$$

↑
instanton number

Dire che $\theta \simeq \theta + 2\pi N$ indica che dovremmo
trovare istantoni con quantizz. razionale in
teorie con $G = \text{SU}(N)/\mathbb{Z}_N$. Infatti qto avviene

($\text{SU}(N)/\mathbb{Z}_N$ bundles hanno più connessioni di gli $\text{SU}(N)$)