Indice

1 Fondamenti di elettronica

1.1 Quantita' fondamentali

Tensione La differenza di potenziale V, anche detta *potenziale* o *forza elletromotrice* o *tensione* (*Voltage* in inglese), e' il costo in energia (o lavoro effettuato) per muovere una carica positiva da un potenziale elettrico inferiore a un potenziale superiore. Visto dal punto di vista della carica, e' l'energia rilasciata dalla carica che si muove dal potenziale superiore a quello inferiore.

Tipicamente la tensione e' espressa in Volt (V) con multipli dai mV ai kV. Vi si riferisce come a un "potenziale tra due punti del circuito o ai capi del componente elettrico", in quanto rappresenta sempre una differenza di potenziale, oppure come al "potenziale in un punto del circuito", sottintendendo che si prende il *ground*, o livello di terra, come riferimento.

Corrente La corrente e' la frequenza di cariche che passano in un certo punto di un circuito.

Tipicamente la corrente si misura in ampere (A) con multipli dai pA agli A. Vi si riferisce come a "una corrente che attraversa un ramo del circuito o un componente elettrico".

Generazione di tensione La differenza di potenziale puo' essere generata da batterie, da generatori veri e propri, da celle solari, ecc.

Potenza : la potenza, ovvero il lavoro per unita' di tempo, consumata da un dispositivo in un circuito e' data dal prodotto della corrente che attraversa il dispositivo moltiplicata per la tensione ai capi del dispositivo stesso: $P = VI$. La potenza si misura in Watts (W), con 1 W = 1 J/s. La potenza di solito si tramuta in calore dissipato, lavoro meccanico, energia irraggiata o immagazzinata. Il calore dissipato e' in particolare un problema di cui tener conto nella progettazione dei circuiti.

Conduttori I componenti di un circuito si collegano tra loro con segmenti di materiale conduttore, detti appunto *conduttori*, che in prima approssimazione hanno lo stesso potenziale ovunque sul singolo segmento. Vedremo che in regime di alte frequenze o basse impedenze questo puo' non risultare vero.

Funzione di trasferimento di un circuito I circuiti elettronici normalmente accettano una forma di ingresso (solitamente una tensione) e producono un'uscita. La relazione tra uscita e entrata viene descritta come funzione di trasferimento $\boldsymbol{H}$. Per un amplificatore audio che produce una tensione in uscita variabile che e' 100 volte piu' grande della tensione in ingresso variabile, H e' solo una costante (100).

In questa parte del corso tratteremo i circuiti lineari, ovvero quelli in cui la tensione in uscita e' legata a quella in entrata tramite una relazione lineare. Sono per esempio i circuiti passivi (R, C, L), gli amplificatori. In questo caso la funzione di trasferimento e', appunto, lineare.

1.2 Leggi di Kirchhoff

Osservando i circuiti si possono dedurre alcune regole fondamentali:

Legge di Kirchhoff per le tensioni: come e' facilmente intuibile, due tratti di circuito collegati in parallelo, ovvero dal polo entrante e dal polo uscente, vedono la stessa differenza di potenziale ai due poli. Questo significa che la somma algebrica del V sul primo tratto e l'opposto del V sul secondo tratto e' zero. Ne deriva che la somma algebrica dei potenziali e delle forze elettromotrici di un circuito chiuso (*maglia*) e' nulla.

Legge di Kirchhoff per le correnti: la somma delle correnti entranti e uscenti da un qualsiasi punto del circuito e' nulla. Questo vuol dire che tratti di circuito connessi in sequenza, cioe' in serie, sono percorsi dalla stessa corrente.

1.3 Resistenza e resistori

La relazione che lega tensione e corrente governa il comportamento e la funzione dei componenti elettrici. Una relazione di proporzionalita' diretta tra le due grandezze e' detta *resistenza*: la corrente che attraversa un conduttore e' proporzionale alla tesione ai capi, quindi:

$$V = IR$$

Tale relazione va sotto il nome di Legge di Ohm e vale solo per materiali, contatti e dispositivi ohmici, appunto. La costante di proprozionalita' R si misura appunto in ohm (Ω).

Altri dispositivi, come diodi e lampadine a filamento, per esempio, non hanno comportamento ohmico (vedi Fig. 1).

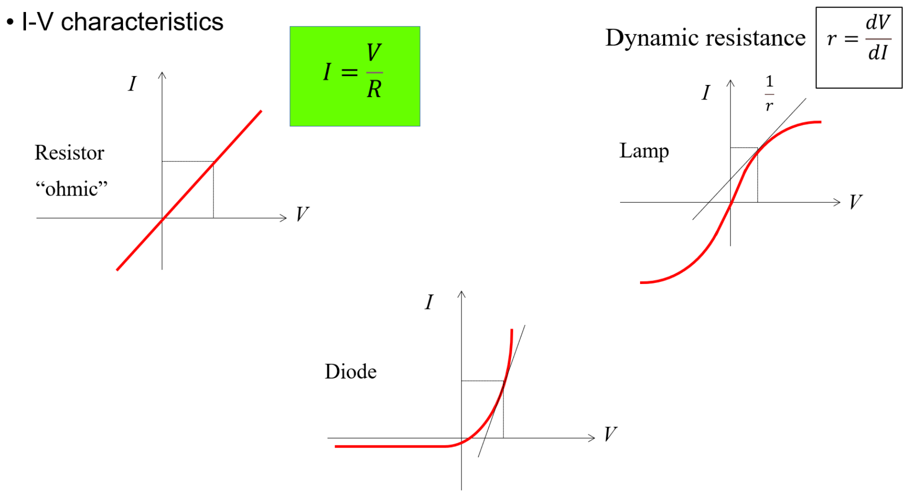

Figura 1: Comportamenti ohmici e non ohmici

I resistori, ovvero i componenti fisici che vengono inclusi in un circuito per aggiungere una determinata resistenza, sono realizzati con un avvolgimento di filo di leghe metalliche a base di ferro, cromo, tungsteno. Per evitare, parzialmente, che questo tipo di resistori a filo si comporti da induttore (perché si vuole avere un comportamento resistivo puro o si vuole evitare la generazione di interferenze elettromagnetiche) l'avvolgimento viene fatto sia in un senso che in quello opposto.

I resistori reali sono caratterizzati dal valore della loro resistenza elettrica, espressa in ohm (Ω), nonché dalla massima potenza (ovvero energia per unità di tempo) che possono dissipare, senza distruggersi, espressa in watt.

Dalla definizione di resistenza (cioe' dalla legge di Ohm), segue che:

- Resistori connessi **in serie** danno una resistenza equivalente uguale alla somma delle singole resistenze. La resistenza di due resistori in serie e' sempre piu' grande delle singole resistenze.

- Resistori connessi **in parallelo** danno una resistenza equivalente il cui reciproco e' la somma dei reciproci delle singole resistenze. La resistenza di due resistori in parallelo e' sempre piu' piccola delle singole resistenze.

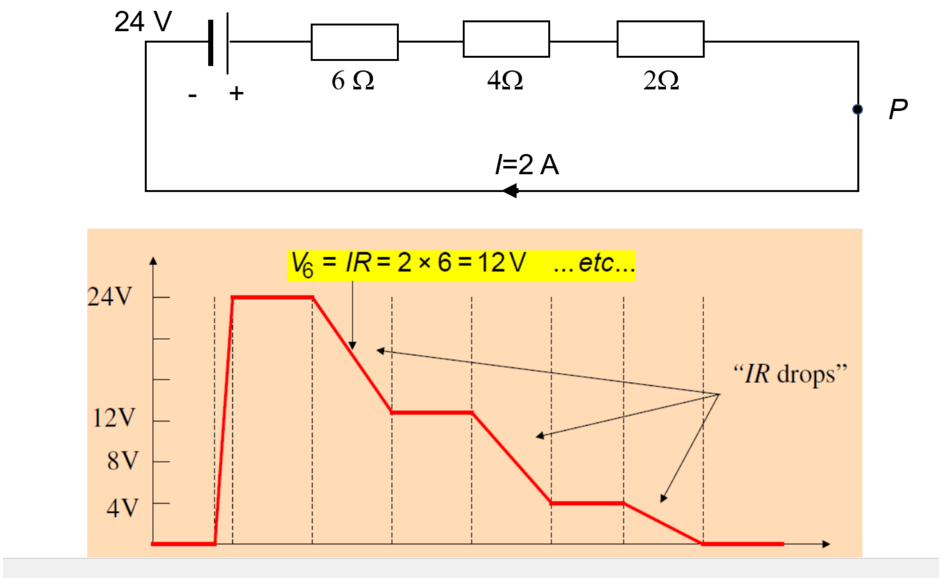

Figura 2: Caduta di potenziale sulle resistenze

La potenza dissipata in un resistore come per qualunque altro dispositivo e' $P = VI$, che per la legge di Ohm in questo caso si puo' anche scrivere come $P = I^2R$ o $P = V^2/R$.

1.3.1 Partitori di tensione

Un partitore di tensione e' un circuito che per una data tensione in entrata V_{in} produce una tensione in uscita V_{out} piu' piccola di V_{in} e variabile grazie alle resistenze introdotte nel circuito (vedi circuito in Fig. 1.3.1).

Da $I = V_{in}/R_{eq} = V_{in}/(R_1 + R_2) = V_2/R_2 = V_1/R_1 = V_{out}/R_2$

In particolare il rapporto tra R2 e la somma delle resistenze R1 e R2 sara' proporzionale al rapporto tra i due potenziali:

$$V_{out} = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

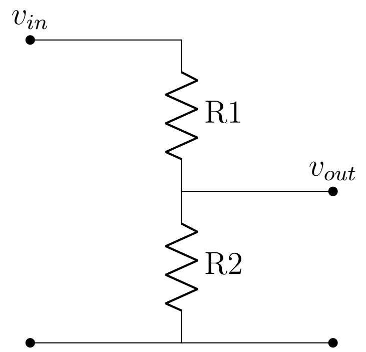

Figura 3: Partitore di tensione

Il partitore di tensione e' normalmente usato per ridurre la tensione in entrata a una uscita piu' piccola. R_2 viene presa regolabile per ottenere un controllore del volume. Piu' direttamente, posso inserire un potenziometro, che in un unico componente rappresenta il rapporto R1R2.

Il partitore di tensione puo' essere pensato come un circuito: R1 e la tensione in entrata possono essere pensate come l'uscita di un amplificatore, mentre R2 come l'entrata dello stadio successivo. In questo caso il partitore di tensione mi sta dicendo quindi quanto segnale arriva all'ingresso nello stadio successivo.

Il partitore dunque funziona come circuito con una funzione di trasferimento pari a $R2/(R1 + R2)$ che agisce sul V in entrata. Visto che la relazione e' lineare, possiamo confermare che e' un circuito lineare.

1.4 Generatori di tensione e di corrente

La figura 4 mostra i simboli circuitali e i versi convenzionali per le tensioni e le correnti dei generatori. La figura mostra generatori sia ideali e che reali. Un cerchio con i simboli + e - rappresenta un generatore ideale di tensione. Un cerchio con una freccia al suo interno rappresenta un generatore ideale di corrente. La resistenza interna del generatore reale è rappresentata da R_s, riportata in serie al generatore di tensione, o in parallelo al generatore di corrente.

Un generatore ideale di tensione è un generatore nel quale la tensione ai terminali $v = v_s$ è indipendente dalla corrente fornita dal generatore stesso al carico. Tale generatore mantiene una caduta di potenziale costante tra i due terminali qualunque sia la resistenza di carico. Un generatore ideale di tensione garantisce una corrente i=v/R in uscita quando una resistenza

R e' collegata tra i suoi terminali. Le batterie ne sono un'ottima approssimazione nella vita reale.

Un generatore ideale di corrente è un generatore la cui corrente $i = i_s$ è indipendente dalla tensione presente ai suoi terminali. Una sorgente di corrente ideale mantiene una corrente costante in uscita qualunque sia la resistenza di carico.

In ogni generatore reale di tensione o di corrente una parte di energia viene trasformata in calore per effetto di un processo di conversione irreversibile. Questa perdita di energia può essere rappresentata dalla dissipazione associata a una resistenza, R_s, posta in serie o in parallelo.

Un generatore reale di tensione fornisce al carico una tensione $v < v_s$, per via della caduta di tensione sulla sua resistenza interna R_s. Per approssimare il comportamento ideale, la resistenza R_s deve avere un valore basso. Un generatore reale di tensione ha un massimo di corrente erogabile.

Un generatore reale di correntr fornisce al carico una corrente $i < i_s$, per via della corrente che scorre nella sua resistenza interna R_s. Per approssimare il comportamento ideale, la resistenza R_s deve avere un valore alto. Un generatore reale di tensione ha una tensione massima applicabile.

I generatori descritti in questo capitolo sono generatori indipendenti. Vedremo più avanti nel corso che esistono anche generatori dipendenti, ovvero generatori la cui tensione o corrente dipende dalla corrente o tensione in un altro punto del circuito.

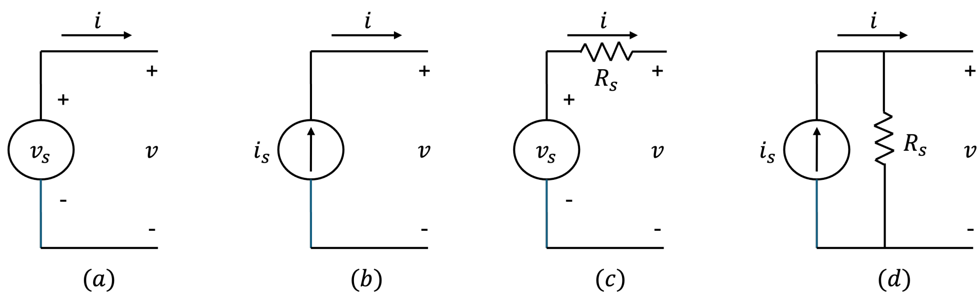

Figura 4: Generatori ideali (a, b) e reali (c, d) di tensione e corrente.

1.5 Teorema di Thevenin per i circuiti

Il teorema di Thevenin afferma che qualunque circuito lineare comprensivo di resistori e sorgenti di tensioni visto da due nodi è equivalente a un generatore di tensione V_{Th} in serie a un resistore R_{Th}. La tensione V_{Th} e' uguale alla tensione (calcolata o misurata) a circuito aperto. La resistenza R_{Th} e' uguale al rapporto tra V_{Th} e la corrente misurata nel circuito in corto (= chiuso).

Riferendoci al partitore di tensione in Fig. 1.3.1, a circuito aperto:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

A circuito in corto:

$$I_{oc} = V_{in}/R_1$$

.

Dunque:

$$R_{Th} = V_{Th}/I_{oc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Aggiungendo una resitenza di carico in output al partitore di tensione, c'e' una caduta di tensione considerevole attraverso tale resistenza, a causa della resistenza finita della sorgente, ovvero la R_{Th} del partitore visto come sorgente di tensione.

1.6 Elementi reattivi

1.6.1 Condensatori

I condensatori sono dispositivi in grado di immagazzinare una carica Q quando sottoposti a una differenza di potenziale V, secondo un rapporto $Q/V = C$ che e' chiamato appunto *capacita'*.

In presenza di una tensione variabile nel tempo *V(t)*, prendendo la derivata dell'eguaglianza, avremo

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

che indica come la corrente sia in qualche maniera non proporzionale alla tensione, ma al suo tasso di cambiamento. Se la tensione cambia piu' velocemente, anche la corrente fornita e' piu' alta.

Essi sono quindi piu' complicati dei resistori: se variamo 1V / 1s, forniamo un A di corrente. Viceversa se forniamo un Amp, la tensione variera di 1 V/s. uF, nF, pF sono normalmente le unita' con cui abbiamo a che fare. Fornendo una corrente di 1 mA a 1 uF la tensione sale di 1000V al secondo. Un impulso di 10 ms ci da' una differenza di 10 V.

Quando carichiamo un condensatore stiamo fornendo energia, e il condensatore non si scalda ma immagazzina l'energia nei suoi campi elettrici interni. La quantita' di energia immagazzinata in un condensatore carico e' $U_C = 1/2CV^2$. Se infatti $dU = Vdq$ e' l'energia infinitesima immagazzinata dal trasporto di dq su una differenza di potenziale V, abbiamo visto che V = q/C, quindi $dU = q/Cdq$ dove q e' la carica gia' presente nel condensatore. Se integriamo su tutta la carica:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

In maniera opposta alle resistenze, le capacita' di condensatori in parallelo si sommano, mentre per la capacita' di condensatori in serie si calcola il reciproco della somma dei reciproci delle singole capacita'.

1.6.2 Induttori

Gli induttori sono molto simii ai condensatori: il tasso di variazione di corrente attraverso un induttore e' proporzionale alla tensione ai suoi capi (contrariamnte ai condensatori, in cui il tasso di variazione della tensione era proprozionale alla corrente attraverso di essi):

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

Tale costante di proprozionalita' L e' l'induttanza e si misura in henry (H). Applicando una tensione costante ai capi di un induttore, la corrente cresce secondo una rampa lineare: per 1 V ai capi di 1 H si ha un aumento di 1 A al secondo. Come per i condensatori, anche negli induttori l'energia iniettata per far aumentare la corrente e' immagazzinata internamente in forma di campo magnetico:

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

analogo a

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2$$

Gli induttori sono disposiviti magnetici:

- la corrente che scorre nella bobina genera un campo magnetico coassiale alla bobina
- variazioni di tale campo magnetico producono una tensione tale da tentare di neutralizzare le variazioni del campo (forza controlettromotrice) che neutralizzano le variazione del campo

L'induttanza L di una bobina e' il rapporto tra flusso magnetico e corrente attraverso la bobina generatrice. L'induttanza dipende da geometria e proprieta' del materiale magnetico.

1.6.3 Trasformatori

Con due bobine accoppiate possiamo costruire un dispositivo in grado di trasformare una tensione in un altra tensione mantenendo la potenza costante. Ovviamente la corrente sara' cambiata in maniera inversamente proporzionale alla tensione. Per esempio, la tensione applicata alla bobina primaria appare ai capi della secondaria moltiplicata per un fattore proprozionale al rapport tra le spire e con una corrente inversamente proprozionale a tale rapporto.

Per converitre la potenza della tensione alternata a 60 Hz utilizza per esempio un trasformatore a nucleo laminato. Un trasformatore con rapporto di spire n aumenta l'impedenza di n^2.

Sono molto usati per convertire potenza tra reti a 230 V e 110 V: oltre a trasformare la tensione alternata di linea in una piu' conveniente, isolano il dispositivo dalla rete elettrica. Trasformatori tipici per gli strumenti elettronici possono avere tensioni sul secondario da 10 a 50 V con correnti da 0.1 a 5 A.

1.7 Segnali

Analizziamo alcuni tipi di segnali.

1.7.1 Segnali sinusoidali

I segnali piu' diffusi sono quelli di forma sinusoidale, per esempio la tensione fornita dalla rete elettrica casalinga: sono caratterizzati da un'ampiezza (massima) A e da una frequenza di oscillazione *f*, espressa in cicli per secondo, o hertz.:

$$V = Asin2\pi ft \tag{1}$$

A volte e' importante sapere il valore di V ad una certa distanza temporale da $t = 0$, in quel caso si esprime esplicitamente anche la fase ϕ di oscillazione:

$$V = A\ sin\ (2\pi ft + \phi)$$

Se si esprime in funzione della frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ allora l'equazione si puo' scrivere come:

$$V = A\ sin\ \omega t$$

. I vantaggi che caratterizzano i segnali sinusoidali sono:

- I segnali sinusoidali sono soluzioni di equazioni differenziali lineari che descrivono molti dei fenomeni della natura e le proprieta' dei circuiti lineari
  - un circuito lineare ha la proprieta' che, quando un segnale in entrata e' la somma di due segnali, manda in uscita la somma delle uscite dei singoli segnali: se $A \to O(A)$ e $B \to O(B)$, allora $A + B \to O(A + B)$.
  - se la risposta del circuito e' $U = f(I)$, allora
    - $f(A + B) = f(A) + f(B)$
    - $f(nA) = nf(A)$
- La risposta di un circuito lineare ad un segnale sinusoidale sara' in generale un segnale sinusoidale alla stessa frequenza, con fase ed ampiezza differenti
- L'effetto del circuito sul segnale di ingresso cambiera' al variare della frequenza del segnale di ingresso
- Il comportamento in funzione della frequenza e' la caratterizzazione del circuito in frequenza (cioe' la definizione di come variano l'ampiezza e la fase dell'uscita in funzione della frequenza)

Anche per queste ragioni e' comune analizzare la risposta *in frequenza* dei circuiti, piuttosto che in funzione del tempo. Cosi' ad esempio un amplifcatore ad alta fedelta' dovrebbe dare una risposta in frequenza uniforme tra almeno 20 Hz e 20 kHz.

Come vedremo in seguito, la **potenza** di un segnale tipo quello definito dall'Eq. 1 si calcola come l'integrale del modulo quadro di tale funzione:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |V(t)|^2\, dt = \frac{A^2}{2} \tag{2}$$

1.7.2 Altri tipi di segnale

Oltre ai segnali piu' regolari e comuni, quali rampe, rampe limitate, dente di sega, triangolare, a gradino e a picco, prendiamo in considerazione alcuni casi specifici:

Rumore Il rumore, di solito rumore termico di origine termica, si mischia con qualsiasi segnale nel mondo reale, e lo "sporca". Uno dei rumori piu' diffusi e' il *rumore bianco gaussiano limitato in banda*, ovvero un rumore con ampiezza distribuita gaussianamente e con frequenze uniformi, la cui potenza su una certa banda e' costante. I resistori sono ad esempio affetti da questo rumore (detto anche *rumore Johnson*).

Onde quadre Ha ampiezza e frequenza determinate, rararmente un'onda quadra in entrata e' preservata in uscita come onda quadra. L'ampiezza rms eguaglia l'ampiezza. I fronti di salita e discesa non sono veramente verticali: hanno un tempo di salita e discesa non nullo, che viene definito tra il 10% e il 90% della massima transizione.

Impulso Viene definito da larghezza e frequenza dell'impulso. Puo' essere periodico in treni, o con una frequenza di impulsazione (o di ripetizione di impulso) e di un "duty cycle", definito come rapporto tra larghezza e ripetizione dell'impulso. Gli impulsi possono essere a polarita' positiva o negativa, e possono andare in positivo o in negativo.

1.7.3 Caratterizzazione dei segnali

Oltre all'ampiezza A dei segnali, si possono considerare altre caratteristiche per descriverli:

- *ampiezza picco-picco*, ovvero la distanza tra massimo e minimo del segnale, espressa come $V\ pp$
- l'*ampiezza quadratica media* del segnale. Per i segnali sinusoidali equivale alla radice quadrata dell'Eq. 2:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0.707A \tag{3}$$

Casi pratici Nelle reti elettriche USA, la tensione in uscita e' 117 V rms, 60 Hz. L'ampiezza e' 165 V (330 V pp). Nelle reti europee, la tensione in uscita e' 160 V rms, 50 Hz. L'ampiezza e' 230 V (460 V pp).

1.7.4 Decibel e confronto tra segnali

Per confrontare due segnali vorremmo usarne l'ampiezza (A_1, A_2) o la potenza (P_1, P_2). Visto che normalmente ci troviamo con molti ordini di grandezza di differenza, e' piu' comodo usare una funzione logaritmica, come il decibel (dB), derivato dall'unita' *bel*, che non si usa. Il decibel e' definito come un multiplo (20 o 10, rispettivamente) del logaritmo in base 10 del rapporto tra le ampiezze:

$$dB = 20\ log_{10}\ \frac{A_2}{A_1} \tag{4}$$

Ad esempio un segnale doppio dell'altro, risultera' in $log_{10}\ 2 = 0.3010$, ovvero l'esponente a cui elevare 10 per ottenere 2, moltiplicato per 20, quindi +6 dB. Se un segnale e' meta' dell'altro, allora $log_{10}\ 0.5 = -0.3010$, quindi -6 dB.

Se un segnale e' 10 volte l'altro, allora $20\ log_{10}\ 10 = +20\ dB$. Se un segnale e' 1/10 dell'altro, allora $20\ log_{10}\ 0.1 = -20\ dB$.

Il decibel si puo' anche esprimere in funzione delle potenze:

$$dB = 10\ log_{10}\ \frac{P_2}{P_1} \tag{5}$$

Nel caso di segnali con la stessa (per esempio, sinusoidali), le due equazioni si equivalgono. Nel caso di funzioni casuali, come per esempio l'andamento del rumore nel tempo, e' necessario usare la definizione Eq.5, in quanto l'effetto "quadratico medio" tiene conto del contributo di una funzione che puo' oscillare casualmente intorno a una baseline.

Il decibel viene usato anche in senso "assoluto", sottintendendo un livello di riferimento convenzionale.

1.8 Circuiti RC

Circuiti con V e I variabili possono essere considerati nello spazio dei tempi o delle frequenze. Nello spazio dei tempi, un semplice circuito che includa un resistore R e un capacitore C come in fig. 5..

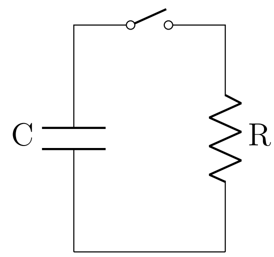

Figura 5: Semplice circuito RC in evoluzione libera (con sola scarica) prima di chiudere il circuito.

Per un condensatore con capacita' C carico, ai suoi capi e' presente inizialmente una differenza di potenziale V_c e in cui e' quindi immagazzinata una carica Q. Alla chiusura del circuito, la carica viene guidata fuori dal condesatore, provocando la scarica del condesnatore. La variazione di carica nel tempo, ovvero la corrente, sara' equivalente alla variazione di tensione nel tempo per la capacita', come si ottiene derivando rispetto al tempo la definizione di C ($Q = C\ V$).

$$C\frac{dV_c(t)}{dt} = I$$

Allo stesso tempo, la stessa corrente, attraversa la resistenza R provocando una caduta di potenziale ai suoi capi pari, per la legge di Ohm, a IR. Per Kirchhoff:

$$V_c(t) + IR = 0$$

Dunque, sostituendo nella precedente, otteniamo

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = 0$$

La soluzione a questa equazione differenziale e' $V_c(t) = Ae^{-t/RC}$, con A ampiezza massima del potenziale, o potenziale iniziale. Quindi un condensatore carico collegato a una resistenza si scarica nel tempo come in Fig 6.

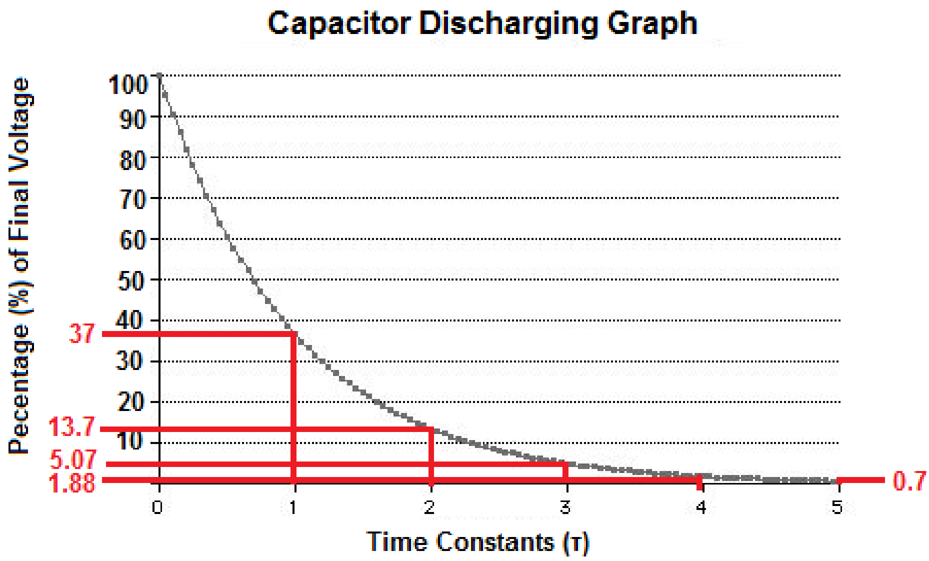

Figura 6: Scarica condensatore

Dopo un tempo caratteristico (o costante di tempo) equivalente al prodotto RC, la carica residua nel condensatore sara' pari a 1/e, ovvero a circa il 37% della carica iniziale e si scarica (entro l'1 %) in 5 RC.

La costante di tempo RC si misura in secondi se R e' espressa in Ω e C in F. Se il condensatore da 1 μF collegato a un resistore da 1 $k\Omega$ e' inizialmente caricato con un potenziale di 1 V, si scarichera' con una corrente iniziale di I = V/R = 1 mA e una costante di tempo di 0.1 ms.

Ora aggiungiamo una batteria che fornisce V_i costante in entrata nel circuito, e misuriamo la tensione in uscita $V(t)$, in parallelo al condensatore e in serie al resistore.

$$C\frac{dV(t)}{dt} = I = \frac{V_i - V(t)}{R}$$

Per Kirchhoff:

$$V_c(t) + IR = V_i$$

da cui

$$I = \frac{V_i - V_c(t)}{R}$$

L'equazione differenziale che ne risulta e'

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_i$$

La soluzione dell'equazione e'

$$V(t) = V_i(1 - e^{-t/RC})$$

.

Per $t = 0$, $V_t(0) = 0$; per t $\gg$ RC, il condensatore e' completamente carico, e $V_f = V_i$ costante. A grandi linee, il condensatore si carica entro l'1% del massimo in 5 tempi caratteristici ($t = 5 \cdot RC$).

Se invertiamo l'equazione possiamo esprimere il tempo necessario per raggiungere un determinato livello di V verso la sua tensione finale $V_f = V_i$:

$$t = RC \; ln\left(\frac{V_i}{V_i - V(t)}\right)$$

Se ora cambiamo V_i in un valore diverso e piu' basso, il condensatore si scarichera' con costante RC fino a raggiungere il nuovo valore V_i con andamento esponenziale $e^{-t/RC}$. Per esempio, un'onda quadra in input produce in output un'onda del tipo descritto in fig. 7.

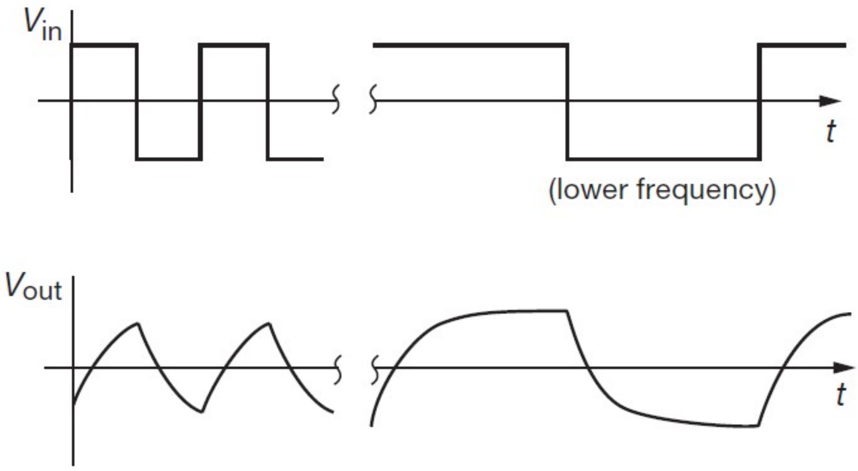

Figura 7: Enter Caption

Cosa succede se la funzione V_i in input e' arbitraria? Allora la risposta sara' l'integrale della funzione in input pesata con l'esponenziale, in modo da mantenere memoria dell'evoluzione passata, normalizzato su RC:

$$V(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} V_i(\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau$$

Di solito non ci si preoccupa troppo del comportamento del circuito in funzione del tempo ma delle frequenze, e ci si interessa particolarmente alle componenti in frequenze che sopravvivono alla presenza di un circuito RC.

1.8.1 Differenziatori o derivatori

Prendiamo il circuito $A.$ in alto in Fig. 8: dalla definizione della capacita', dovremmo avere che $I_C = C\ dV_{in}/dt$, ovvero un circuito che genera un segnale equivalente alla derivata del

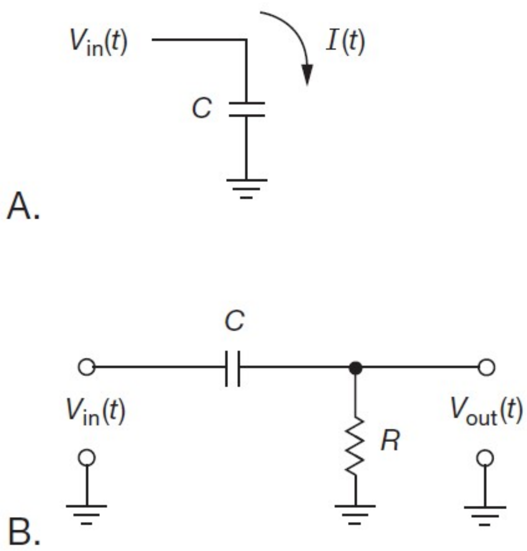

Figura 8: A. Differenziatore ideale perfetto. B. Differenziatore approssimato.

segnale in ingresso. Nella realta' pero', non passa corrente a valle del condensatore, quindi non possiamo usare l'output di questo circuito differenziatore ideale perfetto. Aggiungiamo dunque una piccola resistenza per rilevare la corrente fuori dal condensatore (circuito *B.* in fig. 8). Ora potremo vedere la risposta del circuito, ma la risposta sara' condizionata dal fatto che la tensione ai capi non e' piu' la tensione iniziale. Il differenziatore sara' quindi approssimato. La tensione ai capi di C infatti e' la differenza $V_{in} - V_{out}$, e R scarica la C con una corrente che e' $I = V/R$. Di conseguenza:

$$I = C\frac{d}{dt}(V_{in} - V_{out}) = \frac{V_{out}}{R} \tag{6}$$

che si puo' scrivere anche come:

$$\frac{dV_{in}}{dt} - \frac{dV_{out}}{dt} = \frac{V_{out}}{RC} \tag{7}$$

Se scegliamo R e C abbastanza piccole da avere $dV_{out}/dt \ll dV_{in}/dt$, allora

$$C\frac{dV_{in}}{dt} \simeq \frac{V_{out}}{R} \tag{8}$$

e quindi

$$V_{out}(t) = RC\frac{d}{dt}V_{in}(t) \tag{9}$$

ovvero otteniamo in uscita una tensione che e' proporzionale alla derivata temporale della tensione in entrata, da cui il nome di differenziatore. Se consideriamo segnali sinusoidali, dal punto di vista delle frequenze possiamo notare che la frequenza 1/RC (detta *di cutoff*) deve essere grande ripetto alla frequenza del segnale in entrata: in tal modo quasi tutta la tensione in entrata appare ai capi della C, e la tensione su R e' quasi tutta dovuta alla corrente, che e' la derivata della tensione in input.

Notiamo che questo circuito e' un derivatore soprattutto nella fase in cui la velocita' di crescita di V_{out} e' molto piu' lenta (derivata piu' piccola) della velocita' di crescita di V_{in}. In sostanza, per tenere la variazione di tensione in uscita molto piu' piccola di quella in entrata dobbiamo avere un prodotto RC molto piccolo.

1.8.2 Integratori

Se consideriamo il circuito che opera la trasformazione opposta, ovvero l'integratore, potremmo avere una corrente variabile che entra in un condensatore e misurare la tensione ai capi. Dalla relazione, la tensione sara' l'integrale della corrente. Il circuito con C e R invertiti e' mostrato in Fig. 9. Invece che un segnale in corrente, e' molto piu' comune avere un segnale in tensione in serie a un resistore. La tensione ai capi di R e' $V_{in} - V_{out}$, la tensione ai capi

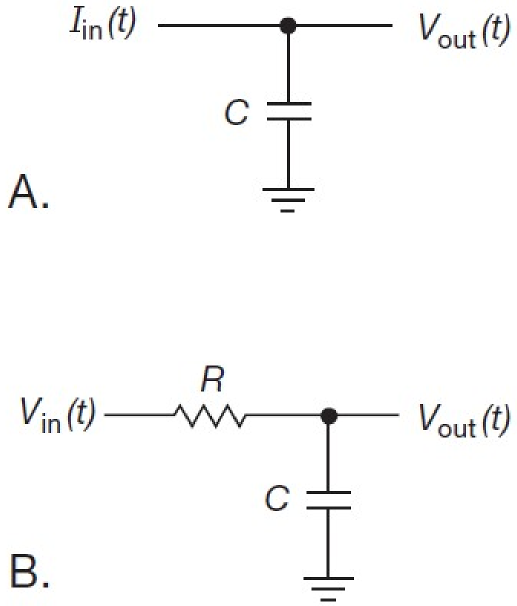

Figura 9: A. Integratore ideale perfetto. B. Integratore approssimato.

di C e' V_{out}, quindi la corrente fornita a C e' $I = C\ dV_{out}/dt$, che e' anche la corrente che attraversa R, quindi:

$$I = C\frac{dV_{out}}{dt} = \frac{V_{in} - V_{out}}{R} \tag{10}$$

Se teniamo la tensione in uscita molto piu' piccola di quella in entrata, ponendo un RC molto grande e un t molto lungo, allora

$$\frac{dV_{out}}{dt} \simeq \frac{V_{in}}{RC} \tag{11}$$

e quindi

$$V_{out}(t) = \frac{1}{RC}\int^{t} V_{in}\ (t)dt + costante \tag{12}$$

da cui il nome di *integratore* dato al circuito: la risposta del circuito e' l'integrale della funzione del segnale in entrata a meno di una costante. Questo tipo di integratore e' efficace soprattutto per $V_{out} \gg V_{in}$, per esempio nella fase iniziale di crescita. Per una funzione d'onda quadra, la prima parte sara' una rampa effettiva come dovrebbe essere l'integrale di una costante, poi comincia a deviare. Stessa cosa quando torna a zero: l'integrale scende linearmente, poi devia.

1.9 Filtri

I circuiti contenenti anche condensatori e induttori sono piu' complessi di quelli con soli resistori in quanto il loro comportamento dipende dalla frequenza. Tali componenti sono *reattivi* e quindi corrompono la forma d'onda per esempio delle onde quadre. Inoltre anche semplici funzioni, come il rapporto di un partitore di tensione, sara' dipendente dalla frequenza dell'onda in entrata se contiene almeno un condensatore o induttore.

L'uscita di un circuito lineare, pilotato da una sinusiode a una certa frequenza *f*, e' anch'essa una sinusioide alla stessa frequenza, al piu' con ampiezza e fase variate. E' comodo studiare la risposta del circuito a una funzione in ingresso sinusoidale a singola frequenza. Si puo' poi variare tale frequenza e compilare un grafico della risposta espressa come rapporto tra uscita e ingresso.

Si puo' generalizzare la legge di Ohm con l'impedenza al posto della resistenza: i resistori mantengono la resistenza con I e V in fase, mentre i condensatori e gli induttori sono reattivi e prensentano quindi una reattanza *X*, e hanno corrente e tensione sempre sfasati di 90^o.

In generale la tensione e la corrente in un determinato punto avranno una relazione di fase in qualche modo intermedia, descritta da un'impedenza complessa.

1.9.1 Impedenza

I circuiti con conduttori (C) e induttori (L) sono piu' complicati di quelli con soli resistori perche' la risposta di questi elementi dipende dalla frequenza f, ovvero da $\omega = 2\pi f$.

- per esempio, un **partitore di tensione** con C o L ha un rapporto di partizione che dipende da *f*
- questi componenti corrompono alcune forme d'onda, come le onde quadre

ma:

- tali circuiti sono comunque **lineari**: l'ampiezza in uscita cresce come l'ampiezza in ingresso
- hanno una particolarita' importante: un circuito lineare pilotato da sinusoide $V(t) = sin 2\pi f t$ ha una risposta a sua volta sinusoidale con la stessa frequenza *f*

Per questo conviene studiare i circuiti lineari attraverso la loro risposta a un segnale sinusoidale a una singola frequenza, chiedendosi come l'ampiezza e la fase dipendano dalla V in ingresso, anche se il circuito non era stato pensato o costruito per operare con segnali sinusoidali. Quello che entra nel circuito e' raramente completamente previsto, infatti, e saperne la risposta alle diverse frequenze e' un passo importante della sua caratterizzazione.

Quando si ha a che fare con L e C si deve generalizzare il concetto di resistenza con quello di *impedenza Z*, in quanto L e C sono elementi **reattivi**, ovvero hanno V e I sfasate di 90^o.

- **L** e **C** hanno **reattanza *X***
- **R** ha **resistenza *R***

Un circuito misto ha comportamento misto, descritto dall'*impedenza complessa*

$$Z = R\ +\ jX$$

di cui la resistenza e' la parte reale e la reattanza la parte immaginaria.

1.9.2 Analisi in frequenza

Un circuito pilotato da generazione di tensione $V(t) = V_0\ sen\ \omega t$, produce una corrente

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} = C\omega V_0 cos\ \omega t$$

cioe' una corrente di ampiezza $\omega C V_0$ con la fase che anticipa quella della tensione in ingresso di 90^o (si noti il cos invece del sen). Se consideriamo solo le ampiezze e trascuriamo le fasi (e quindi i seni e coseni),

$$I = \frac{V}{1/\omega C} = \frac{V}{1/2\pi f C}$$

Il termine a denominatore e' come una R che dipende dalla frequenza, ma sfasa la corrente di 90^o (vedi fig. 10). Esempio: un $C = 1\mu F$ ai capi della rete elettrica a 115 V (rms), 60 Hz,

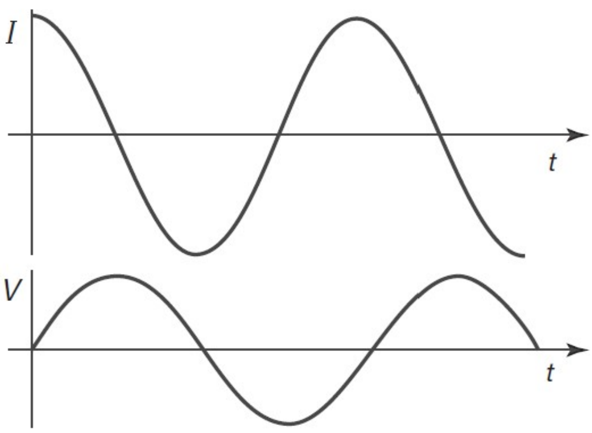

Figura 10: Sfasamento tra tensione ai capi di un condensatore e corrente prodotta dalla capacita' per reazione. Si noti lo sfasamento di 90^o.

assorbe una corrente di ampiezza rms

$$I = \frac{115}{1/(2\pi \times 60 \times 10^{-6})} = 115 \times 43194 \times 10^{-6} = 43.4mA(rms)$$

Notiamo che

$$\frac{|V|}{|I|} = \frac{1}{\omega C}$$

termine che possiamo associare a quella che sarebbe una resistenza. Si chiama *reattanza* e ha simbolo X. Per un condensatore, la reattanza e' X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

quindi una capacita maggiore ha reattanza minore. Ha senso: per caricare una capacita' doppia a pari di velocita' di variazione di tensione e' necessaria una corrente doppia, ovvero la reattanza e' minore: $I = C\ dV/dt$. Anche per la frequenza, la reattanza cala al crescere della frequenza: raddoppiando la frequenza ad ampiezza di V costante, raddoppia la velocita' di variazione della tensione percio' si richiede il doppio della corrente, quindi meta' della reattanza. Si puo' dire che un condensatore e' una resistenza dipendente dalla *f*.

Filtro passa-basso RC (approssimato) Riprendiamo quindi il circuiti visti prima con R e C e trattiamoli in funzione delle frequenze. Il filtro passa basso con R e C verso massa, e' passa-basso perche lascia passare le basse frequenze e blocca le alte frequenze. Se immaginate tale circuito come un partitore di tensione, il ramo inferiore del partitore (C) ha una reattanza decrescente al crescere della frequenza, quindi V_{out}/V_{in} decresce in modo corrispondente:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_C}{R + X_C} = \frac{1/\omega C}{R + 1/\omega C} = \frac{1}{1 + \omega RC}$$

Cosa otteniamo? Per frequenze piccole la reattanza del condensatore e' molto alta, quindi e' come un partitore con resistore piccolo sopra a uno piu' grande, e lascia passare tutta la tensione. Ad alte frequenze la reattanza e' bassa, quindi il partitore lascia passare poco. La frequenza di "cambio" o di transiszione e' $\omega_0 = 1/RC$. A tale frequenza il rapporto approssimato

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} \sim 1/2$$

Filtro passa-alto RC (approssimato) Allo stesso modo ma scambiando R e C nel partitore di prima, abbiamo:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + X_C} = \frac{R}{R + 1/\omega C} = \frac{\omega RC}{\omega RC + 1}$$

e ora al crescere della frequenza cresce la V output mentre si abbatte per le basse frequenze.

Questi circuiti approssimati falliscono nel predire qualunque cosa sugli sfasamenti di questo circuito. La fase di segnale in uscita e' 90^o alle alte frequenze per progressivamente scendere a 45^o alla frequenza di taglio ω_o, e a 0^o per basse frequenze.

Condensatori di blocco Si vuole far passare una banda di frequenze di segnale bloccando la componente continua: passa-alto RC con ω_o appropriata. Per esempio, ho un amplificatore audio in cui voglio far passare da 20 Hz a 20 kHz senza attenuazione. Voglio bloccare tutto sotto i 20 Hz, quindi $t = RC = 1/\omega_{min} = 1/2\pi f_{min} = 30\ ms$ per circa $f_{min} = 5\ Hz$.

Possiamo ora scegliere R e C. R deve avere un carico ragionevole, cioe' non cosi' piccola da essere faticosa da pilotare e non cosi' grande da rendere il circuito capace di captare segnali da altri circuiti. Ricordiamo che una R di carico, ovvero percepita dalla sorgente di tensione come resistenza verso massa, risulta in parallelo con la resistenza interna (verso massa) dell'alimentatore. Se la R di carico e' piu' bassa della resistenza interna, diventa dominante, e agisce come un partitore di tensione con R_2 piu' bassa, andando ad attenuare la tensione erogata. La R di carico deve essere abbastanza grande. 10 $k\Omega$ e' un valore molto usato nel campo audio, quindi 3.3 μF si accoppia bene. Lo stadio successivo dovrebbe avere resistenza di ingresso molto maggiore di 10 $k\Omega$ per evitare effetti di caricamento sull'uscita del filtro, e il circuito pilota (quindi a monte) dovrebbe essere in grado di pilotare tale carico di 10 $k\Omega$ senza attenuazione di ampiezza, per evitare che il filtro possa caricare la sorgente del segnale.

Per evitare distorsioni nel campo del tempo, incurvamenti e sovraelongazioni, nel caso in cui si stiano accoppiando impulsi o onde quadre, possiamo scegliere una costante di tempo τ molto maggiore del periodo T dell'onda $\tau = RC \gg T$. L'incurvamento risultante risulta di circa T/τ.

1.9.3 Tensioni e correnti nel campo complesso

Nonstante la linearita' del circuito con R, C e L rimanga valida anche quando entra in gioco uno sfasamento, dobbiamo trovare una generalizzazione dei concetti di tensione, corrente e resistenza che salvi la legge di Ohm nonostante le fasi cambino. Potremmo scrivere esplicitamente ampiezza e sfasamento di V e I, per esempio $V(t) = 15.4 sen(320t + 0.40)$ ma esiste un modo piu' semplice. Basta rappresentare V e I con numeri complessi, sommarli e sottrarli. Dobbiamo trovare una conversione *reale* ai loro valori misurati.

Ricordiamo che stiamo usando I e V sinusoidali a una singola frequenza.

Impedenza e reattanza L'impedenza e' una resistenza generalizzata a tutti i componenti lineari (resistori, capacitori e induttori). I resistori presentano tensione e corrente sempre in fase, e sono *resistivi*, ovvero possiedono una *resistenza*. Capacitori e induttori presentano corrente e tensione sempre sfasati di 90^o, e si dicono quindi *reattivi*, ovvero possiedono una *reattanza*. In generale un circuito che combina elementi resistivi e reattivi avra' tensione e corrente in qualche relazione intermedia di fase, descritta dall'impedenza complessa, somma di resistenza e reattanza, ovvero:

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

Legge di Ohm generalizzata Esprimendo **I** e **V** in forma complessa, possiamo scrivere l'impedenza come loro rapporto, ottenendo una versione generalizzata della Legge di Ohm:

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ}$$

dove la tensione **V** applicata ai capi di un circuito con impedenza **Z** produce una corrente **I**.

L'impedenza segue le regole della resistenza per quanto riguarda le somme di impedenze in serie e parallelo. Le impedenze complesse di resistenze, condensatori e induttori sono rispettivamente:

$$Z_R = R$$
$$Z_C = -j/\omega C = 1/j\omega C$$
$$Z_L = j\omega L$$

Potenza nei circuiti reattivi La potenza istantanea e' sempre data dal prodotto $P = IV$ per ogni elemento circuitale, ma quando ci sono componenti reattivi in cui V e I non sono semplicemente proporzionali, non si possono solo moltiplicare le ampiezze. Per esempio con uno sfasamento di 90^o tra I e V di un circuito con un condensatore, la potenza media e' nulla: nel primo e terzo quarto del periodo, viene fornita potenza al condensatore che si carica; la sua energia immagazzinata aumenta, e la potenza e' la velocita' di variazione dell'energia. Durante il secondo e quarto quarto la potenza fornita e' negativa, si sta scaricando. Questo e' sempre vero per i componenti puramente reattivi (induttori, condensatori e loro combinazioni).

Si determina la potenza media integrando il prodotto sul tempo trascorso e normalizzando, come al solito:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt$$

oppure piu' semplicemente considerando il prodotto dell'uno per il complesso coniugato dell'altro e prendendone la parte reale.:

$$P = \Re(\mathbb{V}\mathbb{I}^*) = \Re(\mathbb{V}^*\mathbb{I})$$

Con **V** e **I** le ampiezze rms complesse. Prendiamo per esempio una sinusioide con rms = 1 V che pilota un condensatore.

$$\mathbb{V} = 1$$
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{-j/\omega C} = j\omega C$$

Allora

$$P = \Re(\mathbf{VI^*}) = \Re(-j\omega C) = 0$$

Prendiamo ora un circuito RC

$$\mathbf{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$$
$$\mathbf{V} = V_0$$
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_0}{R - (j/\omega C)} = \frac{V_0[R + (j/\omega C)]}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$$

$$P = \Re(\mathbf{VI*}) = \frac{V_0^2 R}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$$

Si usa considerare il rapporto tra potenza e il prodotto delle ampiezze di V e I, ovvero dei loro moduli:

$$|\mathbf{V}||\mathbf{I}| = \frac{V_0^2}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

e si chiama tale rapporto *fattore di potenza*:

$$\frac{P}{|\mathbf{V}||\mathbf{I}|} = \frac{R}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

In questo caso il fattore di potenza e' il coseno dell'angolo di fase tra V e I e va da 0 (puramente reattivo) a 1 (piramente resistivo). Se c'e' componente reattivo, il fattore e' minore di 1. Esso tende all'unita', e la potenza dissipata a

$$V^2/R$$

per capacita' grandi o alle alte frequenze dove la reattanza del condensatore e' molto minore di R.

Partitori e filtri I partitori di tensione si possono generalizzare sostituendo alla resistenza l'impedenza totale, e scrivendo, sempre in notazione complessa:

$$I = \frac{V_{in}}{Z}$$
$$Z_{totale} = Z_1 + Z_2$$
$$V_{out} = IZ_2 = V_{in}\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Cio' porta a trattare facilmente i filtri passa-basso e passa-alto in maniera non approssimata.

Filtro passa-alto Il circuito in fig. 8 si puo' descrivere in campo complesso come:

$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{V}_{in}\frac{R}{R - j/\omega C} = \mathbf{V}_{in}\frac{R(R + j/\omega C)}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

Se interessa solo il modulo e non la fase, si puo' tornare al campo reale:

$$V_{out} = (\mathbf{V}_{out}\mathbf{V}^*_{out})^{1/2} = V_{in}\frac{R}{[(R^2 + 1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

Si noti l'analogia con il partitore resistivo.

Filtro passa-basso Per il circuito in fig. 5 si ottiene invece

$$V_{out} = V_{in}\frac{1}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{1/2}}$$

1.10 Diodi

1.10.1 Simbolo e caratteristica tensione corrente

Il principio di funzionamento del diodo sarà trattato estensivamente nel prosieguo del corso. Anticipiamo ora alcuni comportamenti utili a studiare il diodo come elemento circuitale.

Resistori, condensatori e induttori sono componenti a due terminali, passivi e lineari. Il diodo è anch'esso un dispositivo a due terminali, passivo, ma con caratteristica tensione corrente non lineare. Per il diodo non vale la legge di Ohm e i circuiti con i diodi non hanno un equivalente di Thevenin.

La figura 11 mostra il simbolo del diodo. Il diodo si rappresenta con un triangolo che punta a una linea perpendicolare alla punta. I terminali del diodo, indicati con anodo e catodo nella figura, non sono interscambiali. Il flusso di corrente attraverso il diodo dipende dalla direzione della tensione applicata a questi terminali.

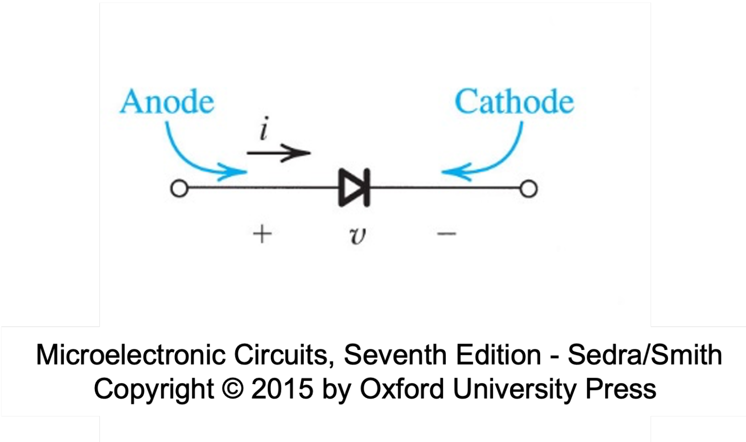

Figura 11: Simbolo circuitale del diodo.

Il verso della punta indica il verso in cui scorre corrente attraverso il diodo in polizzazione diretta. In questo caso si alimenta il diodo con una tensione positiva sull'anodo (rispetto al catodo). La figura 12 mostra la caratteristica tensione corrente del diodo. In polarizzazione diretta, la caratteristica tensione corrente ha una forma esponenziale. Per cadute di tensioni sul diodo inferiori a ≈ 0.5 V, la corrente che scorre nel dispositivo è bassa. Per tensioni più alte ai capi del diodo, la corrente aumenta velocemente, tipicamente di un fattore 10 per un aumento di tensione di 60 mV. Un diodo in conduzione lascia passare una corrente elevata (mA - A) con una caduta di tensione ai suoi capi di ≈ 0.6 - 0.8 V.

In polarizzazione inversa, con una tensione negativa sull'anodo (rispetto al catodo), nel diodo scorre una corrente molto bassa, dell'ordine del nA, e costante, fino a quando si raggiunge il punto di rottura.

Quando il valore della polarizzazione inversa supera la tensione di rottura, il diodo lascia passare una corrente elevata con una tensione pressochè costante ai suoi capi. La tensione di rottura è specifica del tipo di diodo usato. Quando si utilizza il diodo in regime di rottura, è necessario limitare la corrente fornita dall'alimentatore al circuito per evitare di superare la potenza massima che il diodo può dissipare e quindi evitare di danneggiarlo.

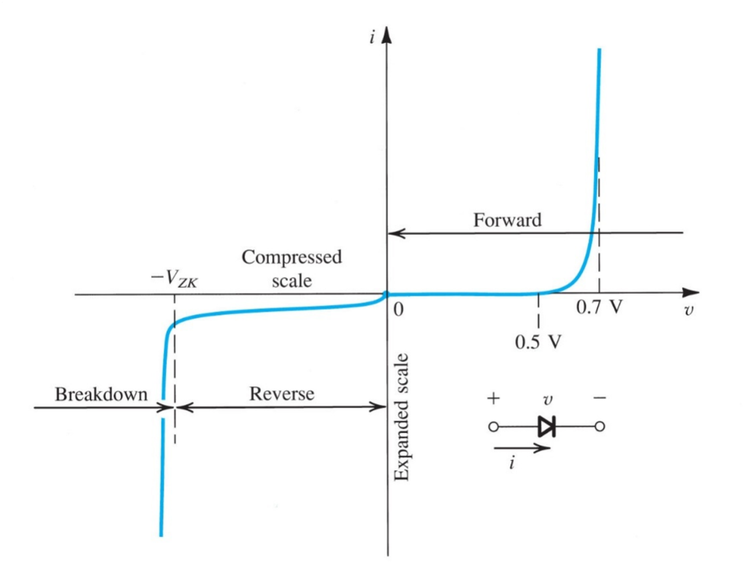

Figura 12: Caratteristica tensione corrente del diodo.

Il diverso comportamento del diodo in polarizzazione diretta e inversa è usato per realizzare circuiti raddrizzatori. Sfruttando il comportamento del diodo nella regione di rottura, si possono realizzare degli stabilizzatori di tensione. Altri circuiti realizzati con i diodi sono, ad esempio, i traslatori di livello e le porte logiche.

1.10.2 Modelli circuitali

Per semplificare l'analisi di circuiti con i diodi, si possono usare dei modelli circuitali approssimando la caratteristica tensione corrente del diodo.

La figura 13 mostra il modello a caduta di tensione costante. Nessuna corrente scorre nel diodo per tensioni ai suoi capi inferiori a 0.7 V. Quando il diodo conduce, la caduta di tensione ai suoi capi è $v_D = 0.7$ V.

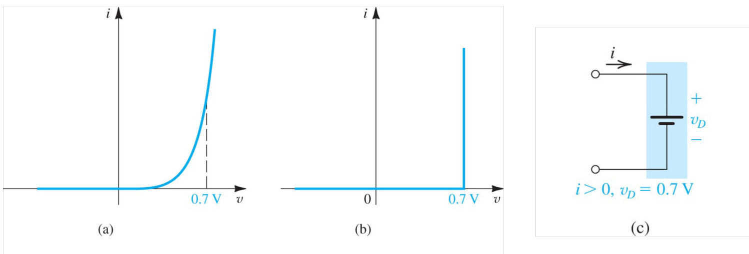

Figura 13: Modello del diodo a tensione costante.

Un altro modello, mostrato in figura 14, è il modello di diodo ideale, in cui il diodo viene approssimato con un interruttore. In polarizzazione inversa il diodo è un circuito aperto, e la corrente che lo attraversa è nulla. In polarizzazione diretta si comporta come un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla.

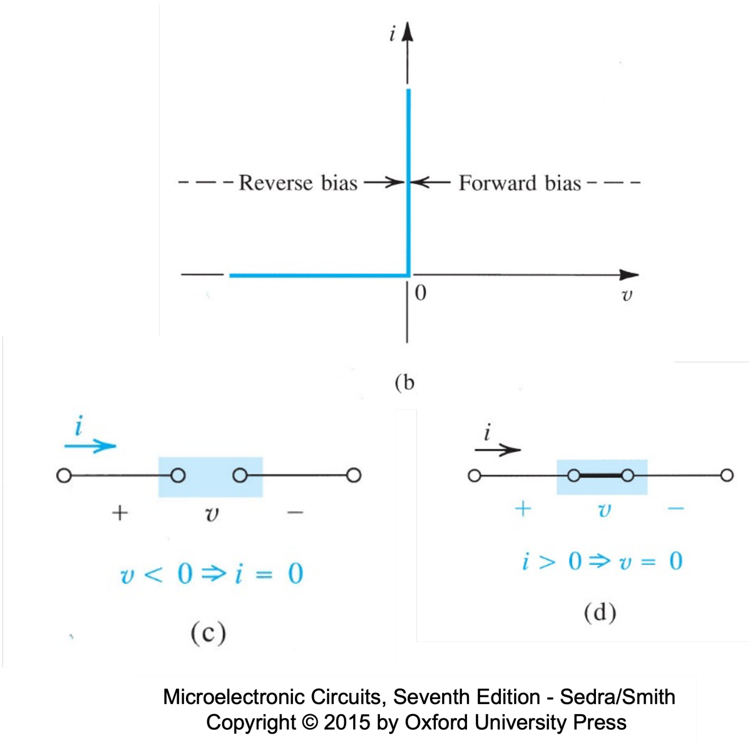

Figura 14: Modello del diodo ideale.

1.10.3 Applicazioni: raddrizzatori

Una delle applicazioni più importanti dei diodi è la realizzazione di circuiti raddrizzatori. I raddrizzatori a diodo sono un elemento essenziale degli alimentatori stabilizzati per dispositivi elettronici. Un alimentatore stabilizzato, o regolatore di tensione ideale, è uno strumento che fornisce una tensione continua predeterminata, V_O, indipendente dalla corrente erogata al carico, I_L, dalla temperatura o da qualsiasi variazione della corrente di rete. La figura 15 mostra lo schema a blocchi di un alimentatore stabilizzato. Tali dispositivi sono composti da: un trasformatore, un raddrizzatore, un filtro, e un regolatore di tensione. Come si vede nella figura, l'alimentazione a corrente alternata (AC) fornita dalla rete, viene convertita in una alimentazione a corrente costante (DC) fornita al carico. Il raddrizzatore e il filtro vengono trattati di seguito.

Un circuito formato da un diodo con una resistenza in serie, alimentato da una sorgente di tensione alternata è un **raddrizzatore a semi-onda** (figura 16). Analizziamo questo circuito utilizzando il modello di diodo ideale. Quando la tensione in ingresso è positiva, il diodo conduce e si comporta come un corto circuito. Quando la tensione in ingresso è negativa, il diodo si comporta come un circuito aperto e non c'è corrente nel circuito. In

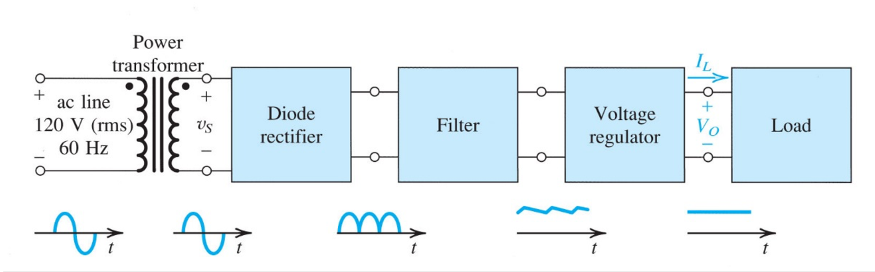

Figura 15: Schema a blocchi di un alimentatore stabilizzato.

questo modo il circuito lascia passare solo la parte positiva del segnale sinusoidale. Mentre il segnale in ingresso è una forma d'onda alternata con valore medio nullo, il segnale in uscita, v_O, è una tensione unipolare con valore medio, V_{DC} diverso da zero, e con lo stesso periodo, T, del segnale in ingresso.

$$V_{DC} = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V_P sen(\omega t)\, dt = \frac{V_P}{T}\left(-\frac{cos\omega t}{\omega}\Big|_0^{T/2}\right) = \frac{V_P}{T\omega}\left(-cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{T}{2} + cos 0\right) \tag{13}$$

$$V_{DC} = \frac{2V_P}{\omega T} = \frac{V_P}{\pi} \tag{14}$$

La corrente media fornita al carico è

$$I_{DC} = \frac{V_P}{\pi R} \tag{15}$$

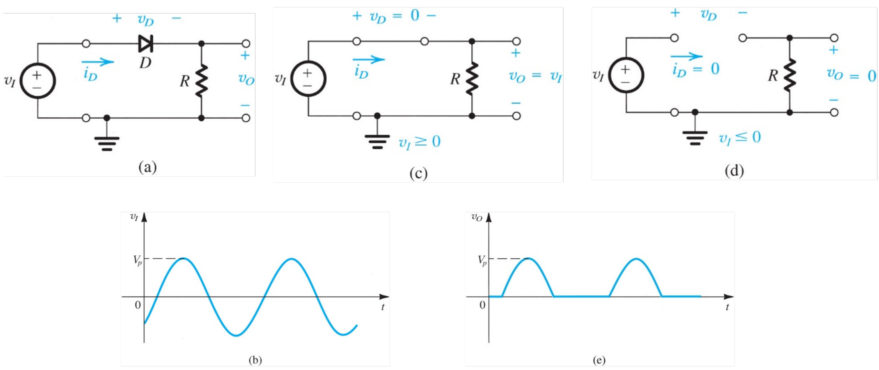

Figura 16: (a) Raddriazzatore a semi-onda. (b) Tensione in ingresso. (c) Diodo in conduzione sostituto da un corto circuito. (d) Diodo in polarizzazione inversa sostituito da un circuito aperto. (e) Tensione in uscita.

Se si considera un diodo reale, si deve tenere conto della caduta di tensione ai capi del diodo, $\approx$ 0.7 V. Si noti in figura 17 come la caduta di tensione sul diodo, V_D, risulti in un'ampiezza del segnale in uscita più bassa del segnale in ingresso.

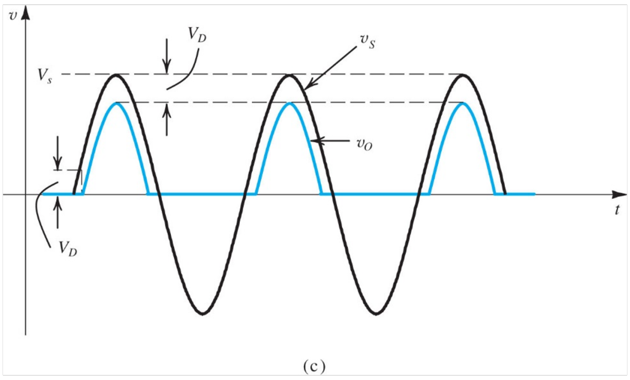

Figura 17: Tensioni in ingresso e in uscita in circuito raddrizzatore a semi-onda. Il valore di picco della tensione in uscita è più basso di quello in entrata per via della caduta di tensione sul diodo in conduzione.

Il circuito mostrato in figura 18 è un **raddrizzatore a ponte**. In un raddrizzatore a ponte, si hanno due diodi in conduzione per ciascuna polarità del segnale in ingresso. Quando la polarità della tensione in ingresso è positiva, conducono i diodi D1 e D2. Quando la polarità della tensione in ingresso è negativa, conducono i diodi D3 e D4. In entrambi i casi i diodi lasciano scorrere la corrente nel carico nella stessa direzione. Si ottiene così la forma d'onda mostata in figura 18. Il segnale in uscita, v_O, è una tensione unipolare con valore medio, V_{DC} diverso da zero, come nel caso del raddrizzatore a semi-onda, ma con periodo doppio rispetto al segnale in ingresso. In questo caso il valore medio della tensione e corrente in uscita sono dati da:

$$V_{DC} = \frac{1}{T/2} \int_0^{\frac{T}{2}} V_S sen(\omega t)\, dt \ = \frac{2V_S}{\pi} \tag{16}$$

$$I_{DC} = \frac{2V_S}{\pi R} \tag{17}$$

L'ampiezza del segnale in uscita è più bassa rispetto a quella del segnale in ingresso di $\approx$ 1.4 V, valore corrispondente alla caduta di tensione sui due diodi in conduzione.

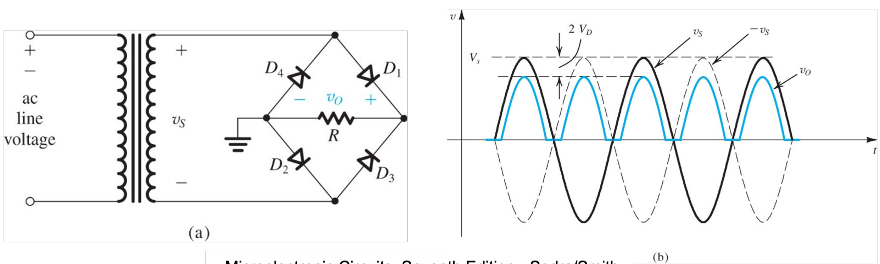

Figura 18: (a) Circuito del raddrizzatore a ponte. (b) Tensioni in ingresso e in uscita.

Le forme d'onda rettificate sono unipolari, con un valore medio DC, ma sono ancora un segnale ondulato. La tensione presenta grandi oscillazioni periodiche attorno al valore stabile. Per ridurre l'ondulazione (ripple) del segnale in uscita da un circuito raddrizzatore, e ottenere una tensione (quasi) costante, si utilizza un filtro capacitivo. Il filtraggio si ottiene ponendo un condensatore in parallelo al carico.

La figura 19 mostra il filtraggio della tensione in uscita da un raddrizzatore a semionda. Il condensatore immagazzina energia quando il diodo conduce e restituisce questa energia al carico durante la fase di polarizzazione inversa.

La costante di tempo per la carica del condensatore è data dal prodotto della capacità, C, per la resistenza del diodo. Essendo la resistenza di un diodo in conduzione molto bassa, idealmente 0 Ω, la carica del condensatore è molto veloce e la tensione in uscita segue la tensione in ingresso. Il condensatore quindi si carica fino al valore di picco della sinusoide in ingresso (meno la caduta di tensione ai capi del diodo).

La costante di tempo per la scarica del condensatore è data dal prodotto della capacità, C, per la resistenza di carico, R. Il valore del condensatore si sceglie alto, in modo da avere una costante di tempo alta rispetto al periodo della sinusoide ($RC \gg T$) e quindi una scarica lenta del condensatore. In questo modo la tensione di uscita diminiusce poco rispetto al valore di picco tra due cicli di carica del condensatore.

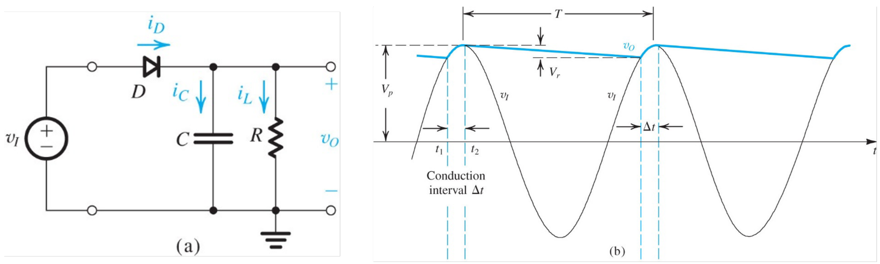

Figura 19: (a) Circuito del raddrizzatore a ponte. (b) Tensioni in ingresso e in uscita.

La diminuzione del segnale in uscita tra due cicli di carica del condensatore, si chiama tensione di ripple. Vediamo come calcolarla. Durante la fase di scarica del condensatore si ha

$$v_O = V_P \exp -\frac{t_2 - t_1}{\tau}. \tag{18}$$

Approssimando $t_2 - t_1 \approx T$, e con $\tau = RC$, si ottiene

$$v_O = V_P \exp -\frac{T}{RC}. \tag{19}$$

La tensione di ripple è

$$V_r = V_P - V_P(\exp -\frac{T}{RC}). \tag{20}$$

Ricordiamo che $\exp x \approx 1 + x$ per $x \ll 1$. Siccome, come detto sopra, $RC \gg T$, possiamo scrivere

$$V_r = V_P - V_P(1 - \frac{T}{RC}) = \frac{V_P T}{RC} = \frac{V_P}{fRC}. \tag{21}$$

Per un raddrizzatore a ponte, con $t_2 - t_1 \approx T/2$, la tensione di ripple è

$$\frac{V_P T}{2RC} = \frac{V_P}{2fRC}. \tag{22}$$

1.11 Introduzione agli amplificatori

Prima di procedere con la discussione degli amplificatori è bene chiarire la nomenclatura utilizzata per i segnali di tensione e corrente. Prendiamo come esempio la corrente, che si indica con la lettera "i". Scriveremo

$$i_C(t) = I_C + i_c(t)$$

$$i_c(t) = I_c sen(\omega t)$$

dove

- $i\_C(t)$ è la corrente istantanea formata da una componente DC e una componente AC;
- I_C è una corrente continua (i.e. DC);
- $i_c(t)$ è una corrente alternata (i.e AC), nel nostro caso una sinusoide;
  - Nel campo della frequenza $i_c(t)$ sarà scritta come $I_c(\omega)$.
- I_c è l'ampiezza della sinusoide.

Per la tensione, la nomenclatura è identica, usando la lettera "v", anzichè la lettera "i". La tensione (o corrente) continua fornita da un alimentatore è indicata con V_{DD} (I_{DD}).

In questa parte del corso studieremo gli amplificatori come elementi circuitali, senza entrare nel dettaglio di quali elementi li compongono e come vengono costruiti. Un amplificatore è un dispositivo attivo che aumenta l'ampiezza di un segnale in ingresso di un fattore moltiplicativo, A, detto guadagno dell'amplificatore. Tra le funzioni di elaborazione di segnali elettronici, l'amplificazione è la più importante.

Per evitare la distorsione del segnale in ingresso, l'amplificatore deve essere un dispositivo lineare. La caratteristica di trasferimento di un amplificatore lineare è mostrata in figura 20. Per un amplificatore lineare vale la relazione: $v_O = Av_I$, dove v_O è la tensione in uscita e v_I è la tensione in ingresso.

1.11.1 Simbolo circuitale dell'amplificatore

La figura 21 mostra il simbolo circuitale dell'amplificatore. L'amplificatore è rappresentato da un triangolo con due terminali in ingresso e due terminali in uscita, di cui uno può essere in comune e connesso a massa.

1.11.2 Guadagno di tensione, corrente e potenza

La figura 22 mostra un amplificatore di tensione. All'ingresso è collegata una sorgente di tensione, v_I, e all'uscita è collegato un carico resistivo, R_L. La corrente i_I è la corrente in

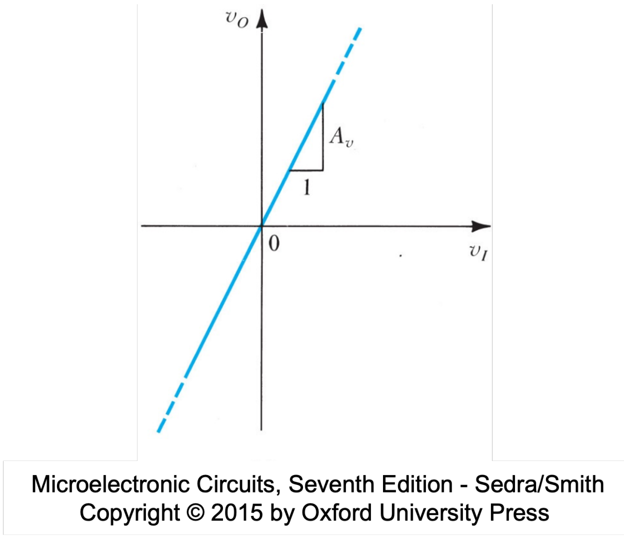

Figura 20: Caratteristica di trasferimento di un amplificatore lineare.

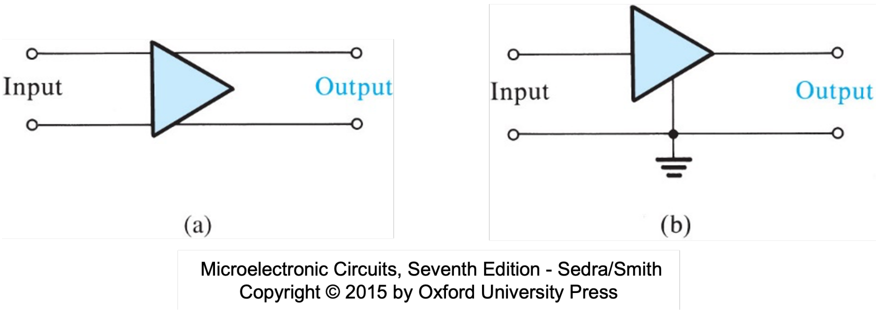

Figura 21: (a) Simbolo circuitale dell'amplificatore. (b) Amplificatore con un terminale in comune (a massa) tra ingresso e uscita.

ingresso e la corrente i_O è la corrente in uscita. La tensione in uscita è v_O. Il guadagno di tensione A_v dell'amplificatore è dato da:

$$A_v = \frac{v_O}{v_I}. \tag{23}$$

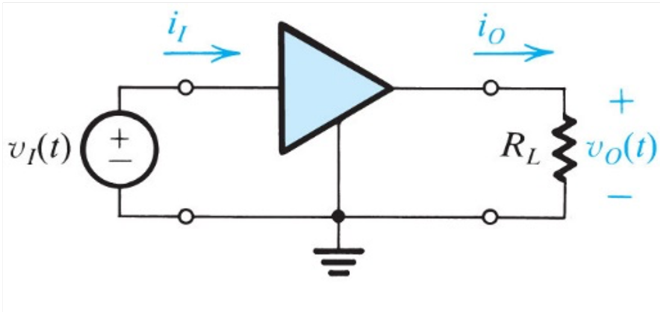

Figura 22: Amplificatore di tensione.

Gli amplificatori aumentano la potenza del segnale, fornendo al carico una corrente superiore a quella proveniente dalla sorgente del segnale di ingresso. Si possono quindi definire un guadagno di corrente e un guadagno di potenza.

$$A_i = \frac{i_O}{i_I}. \tag{24}$$

$$A_p = \frac{v_O i_O}{v_I i_I}. \tag{25}$$

1.11.3 Alimentazione degli amplificatori

Gli amplificatori sono elementi attivi e necessitano di un'alimentazione. L'alimentatore fornisce la corrente extra fornita al carico e anche la corrente necessaria al funzionamento dell'amplificatore stesso, ovvero degli elementi circuitali che lo compongono. La figura 23 mostra il circuito completo per un amplificatore di tensione alimentato con due tensioni continue, una positiva, $V^+ = V_{CC}$, e una negativa, $V^- = V_{EE}$. Per questo circuito si può scrivere

$$P_{DC} + P_I = P_L + P_{amp} \tag{26}$$

dove P_{DC} è la potenza fornita dall'alimentatore, P_I è la potenza fornita dalla sorgente di tensione in ingresso, P_L è la potenza dissipata dal carico e P_{amp} è la potenza dissipata dai circuiti interni dell'amplificatore. Spesso, per semplicità, l'alimentazione non è mostrata nello schema del circuito (come in figura 22), ma l'alimentazione è sempre presente.

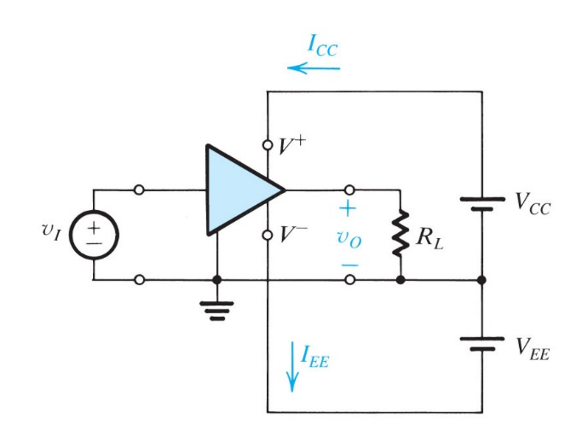

Figura 23: Amplificatore con due tensioni di alimentazione.

1.11.4 Saturazione dell'amplificatore

Tipicamente la risposta di un amplificatore è lineare in un intervallo stabilito di tensioni in ingresso e in uscita. Al di fuori di questo intervallo, l'amplificatore distroce il segnale ingresso. Questo comportamento è mostrato in figura 24. L'intervallo in cui l'amplificatore ha un comportamento lineare è definito dall'alimentazione applicata. La tensione di uscita non può essere superiore o in inferiore a V_{CC} e V_{EE}, rispettivamente. In particolare, i limiti di saturazione positivo, L_+, e negativo, L_-, si trovano solitamente entro una frazione di volt della tensione dell'alimentatore corrispondente. Per i segnali ingresso di definiscono quindi un limite inferiore $\frac{L_-}{A_v}$ e un limite superiore $\frac{L_+}{A_v}$. Come mostra la figura, segnali in uscita che superano i limiti di saturazione vengono tagliati.

1.11.5 Modello circuitale dell'amplificatore di tensione

La figura 25 mostra il modello circuitale di un amplificatore di tensione. L'amplificatore assorbe corrente dalla sorgente del segnale, e ha quindi una resistenza in ingresso R_i. In uscita si ha una resistenza R_o che rappresenta il cambiamento della tensione in uscita quando viene fornita corrente a un carico. Con il simbolo a rombo si indica un generatore controllato, cioè un generatore la cui tensione o corrente dipende dalla tensione o corrente in un altra parte del circuito. In questo caso, abbiamo un generatore di tensione controllato dalla tensione in ingresso, che fornisce una tensione $A_{vo}v_i$ al carico. A_{vo} è il guadagno di tensione a circuito aperto, ovvero in assenza di carico:

$$A_{vo} = \left.\frac{v_o}{v_i}\right|_{i=0}. \tag{27}$$

La figura 25 mostra il modello di un amplificatore di tensione con una sorgente di tensione in ingresso e un carico rappresentato da una resistenza in uscita. Da questa figura si può capire che per accoppiare al meglio il segnale in ingresso con l'amplificatore è necessario che $R_i \gg R_s$. Le due resistenze infatti formano un partitore di tensione, e si ha

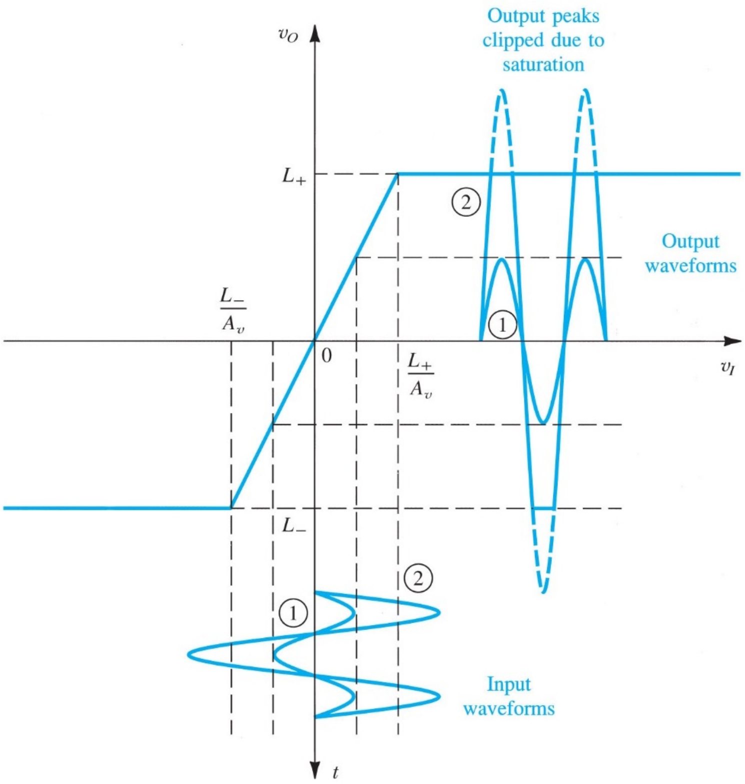

Figura 24: Caratteristica di trasferimento di un amplificatore con regione lineare e saturazione.

$$v_i = v_s \frac{R_i}{R_i + R_s}. \tag{28}$$

Per fare in modo che tutto il segnale in ingresso appaia all'ingresso dell'amplificatore, la caduta di tensione su R_s deve essere molto piccola rispetto alla caduta di tensione su R_i. Nel caso ideale, un amplificatore di tensione ha una resistenza in ingresso $R_i = \infty$.

In modo simile, per fare in modo che la tensione amplificata $A_{vo}v_i$ venga applicata al carico è necessario che $R_o \ll R_L$. Anche in uscita si ha un partitore di tensione e possiamo scrivere

$$v_o = A_{vo}v_i \frac{R_L}{R_L + R_o}. \tag{29}$$

Nel caso ideale, un amplificatore di tensione ha una resistenza in uscita $R_o = 0$.

Il guadagno totale dell'amplificatore di tensione è dato da

$$G_v = \frac{v_o}{v_s} = A_{vo} \frac{R_i}{R_i + R_s} \frac{R_L}{R_L + R_o}. \tag{30}$$

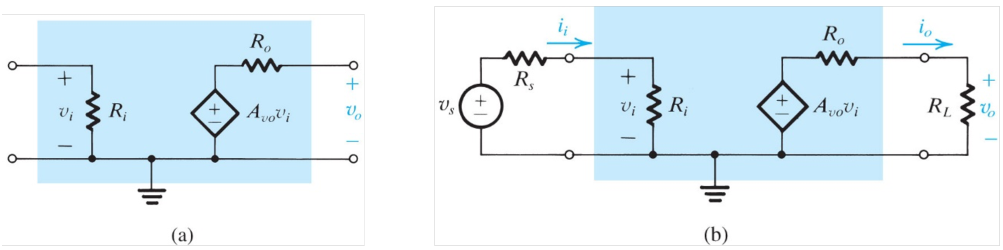

Figura 25: (a) Modello circuitale dell'amplificatore di tensione. (b) Amplificatore di tensione con segnale in ingresso e carico resistivo.

1.11.6 Altri tipi di amplificatori

Negli amplificatori i segnali di ingresso e di uscita possono essere sia tensioni che correnti. Oltre all'amplificatore di tensione, in cui entrambi i segnali in ingresso e in uscita sono tensioni, si hanno: amplificatori di corrente, in cui sia il segnale d'ingresso che quello d'uscita sono correnti; l'amplificatore a transcoduttanza, in cui il segnale d'ingresso è una tensione e quello d'uscita è una corrente; l'amplificatore a transresistenza, in cui il segnale d'ingresso è una corrente e quello d'uscita è una tensione. I modelli circuitali di questi amplificatori sono mostrati in figura 26.

Un amplificatore di corrente dovrà avere una resistenza in ingresso piccola, per poter assorbire la maggior parte della corrente in ingresso, e una resistenza di uscita alta, per fornire tutta la corrente amplificata al carico. Nel caso ideale, $R_i = 0$ e $R_0 = \infty$. La corrente amplificata è $A_{is}i_i$, dove A_{is} è il guadagno di corrente in corto cirucito, ovvero con $v_O = 0$.

Avendo discusso gli amplificatori di tensione e corrente, dovrebbe essere ovvio quali sono i valori ideali delle resistenze in ingresso e in uscita degli amplificatori a transconduttanza e a transresistenza. Mentre A_{vo} e A_{is} sono adimenasionali, la transconduttanza di cortocircuito ha la dimensione di [A/V] e si misura in Ω^{-1}, e la transresistenza a circuito aperto ha la dimensione di [V/A] e si misura in Ω.

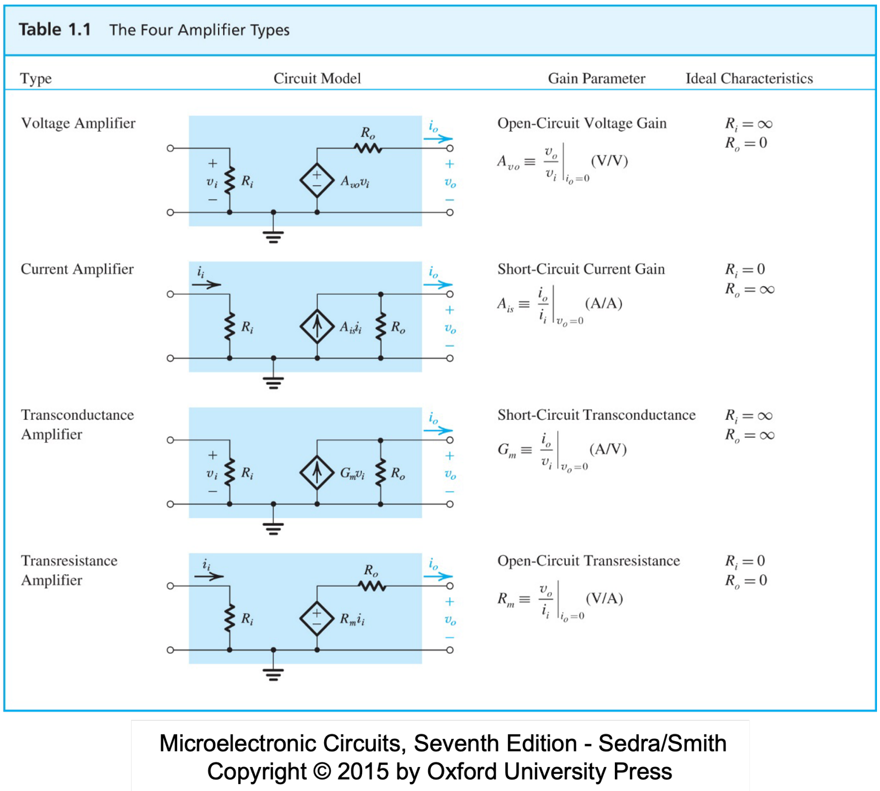

Table 1.1 The Four Amplifier Types

Type	Circuit Model	Gain Parameter	Ideal Characteristics
Voltage Amplifier		Open-Circuit Voltage Gain $A_{vo} \equiv \left.\frac{v_o}{v_i}\right\vert_{i_o=0}$ (V/V)	$R_i = \infty$ $R_o = 0$
Current Amplifier		Short-Circuit Current Gain $A_{is} \equiv \left.\frac{i_o}{i_i}\right\vert_{v_o=0}$ (A/A)	$R_i = 0$ $R_o = \infty$
Transconductance Amplifier		Short-Circuit Transconductance $G_m \equiv \left.\frac{i_o}{v_i}\right\vert_{v_o=0}$ (A/V)	$R_i = \infty$ $R_o = \infty$
Transresistance Amplifier		Open-Circuit Transresistance $R_m \equiv \left.\frac{v_o}{i_i}\right\vert_{i_o=0}$ (V/A)	$R_i = 0$ $R_o = 0$

Figura 26: I quattro tipi di amplificatore.

1.11.7 Risposta in frequenza degli amplificatori

Per studiare la risposta in frequenza degli amplificatori, bisogna considerare i componenti reattivi che si trovano all'interno all'amplificatore, e in alcuni casi, all'esterno dell'amplificatore. Questi componenti sono condensatori.

Nel campo della frequenza la relazione tra i segnali sinusoidali in ingresso e in uscita dall'amplificatore è una funzione di traferimento complessa, $T(\omega)$, con un'ampiezza e una fase. L'ampiezza della funzione di trasferimento è il guadagno dell'amplificatore.

La figura 27 mostra un circuito per lo studio della risposta in frequenza di un amplificatore. L'ampiezza della funzione di trasferimento è data dal rapporto tra l'ampiezza dei segnali sinusoidali in ingresso e in uscita: $|T(\omega)| = \frac{V_o}{V_I}$, e ϕ è la differenza di fase tra questi segnali.

I condensatori interni all'amplificatore sono utilizzati per stabilizzare l'amplificatore e evitare che l'uscita oscilli. Questi condensatori danno tipicamente un effetto di attenuazione del guadagno alle alte frequenze. I condensatori esterni sono usati in ingresso o in uscita

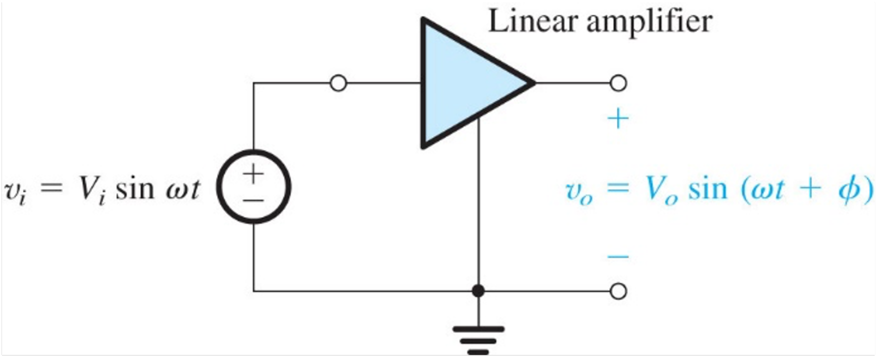

Figura 27: Circuito per la misura della risposta in frequenza di un amplificatore.

all'amplificatore e servono per bloccare la componente di tensione (o corrente) continua del segnale in ingresso o in uscita. Questo si rende necessario quando il valore di tale componente è al di fuori del range specificato per l'amplifcatore (condensatore in ingresso), o per lo stadio a cui l'amplificatore fornisce il segnale (condensatore in uscita). Questi condensatori danno quindi un effetto di attenuazione del guadagno alle basse frequenze. La figura 28 mostra l'accoppiamento capacitivo di due amplificatori.

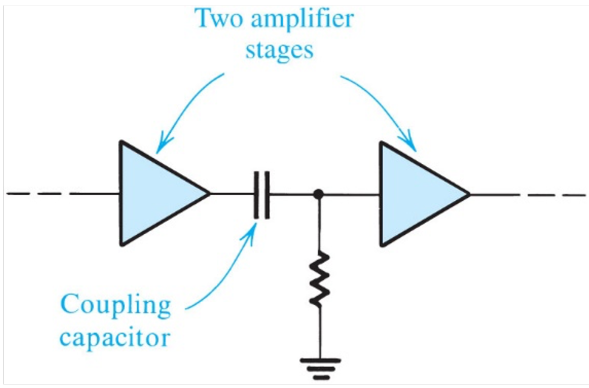

Figura 28: Esempio di accoppiamento capacitivo tra due amplificatori.

Il diagramma di Bode in figura 29 mostra la risposta in frequenza di un amplificatore con capacitori non solo interni ma anche esterni. Si definisce banda passante dell'amplificatore l'intervallo di frequenze in cui il guadagno dell'amplificatore è constante. Le frenquenze ω_1 e ω_2 sono le frequenze alle quali il segnale in uscita dall'amplificatore è attuanto di -3 dB. Il taglio a basse frequenze è dovuto ai condensatori esterni e quello alle alte frequenze è dovuto ai condensatori interni.

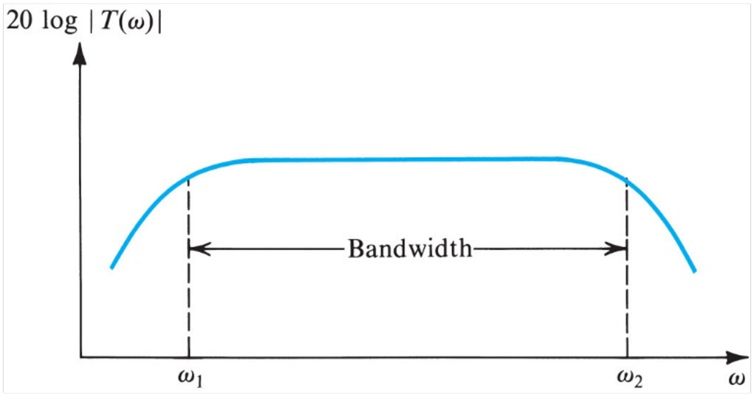

Figura 29: Diagramma di Bode del guadagno di un amplificatore.

Nei circuiti integrati è difficile avere condensatori di valore elevato, e quindi non si usano condensatori di accoppiamento. Il valore DC viene eliminato utilizzando amplificatori differenziali. Gli amplificatori integrati ideali hanno pertanto una banda passante che (in teoria) arriva fino a frequenze DC.

1.12 Amplificatori operazionali

L'amplificatore operazionale (op amp) è un elemento costitutivo molto versatile nei circuiti elettronici analogici. Originariamente era utilizzato per eseguire operazioni matematiche in sistemi analogici, uso da cui deriva il nome "operazionale". I primi amplificatori operazionali integrati arrivarono a metà degli anni '60. Gli amplificatori operazionali di oggi hanno caratteristiche che si avvicinano molto all'ideale, prestazioni vicine a quelle previste teoricamente, e sono economici.

Gli amplificatori operazionali consentono di progettare una varietà di circuiti che eseguono diverse funzioni. L'amplificatore operazionale ha proprietà ben note e questo facilita la progettazione dei circuiti che lo utilizzano. Un amplificatore operazionale è costituito da poche decine di transistor, diversi resistori e un condensatore.

Come mostrato in figura 30, l'amplificatore operazionale è un dispositivo a tre terminali. Ha un ingresso invertente (1, -), un ingresso non invertente (2, +) e un'uscita (3). L'amplificatore operazionale richiede due alimentatori di tensione costante (V_{CC} positiva, V_{EE} negativa) per il funzionamento.

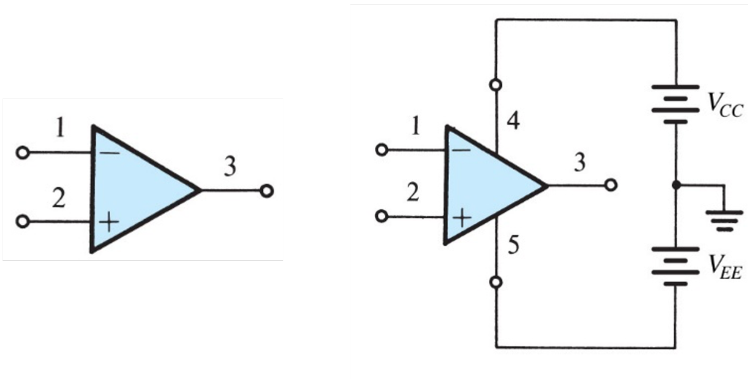

Figura 30: Simbolo circuitale dell'op amp.

L'amplificatore operazionale è progettato per amplificare la differenza tra i segnali di tensione in ingresso ($v_2 - v_1$) di un fattore pari al guadagno, A. In uscita si ha pertanto $v_3 = A(v_2 - v_1)$. Le tensioni v_1, v_2, v_3 sono misurate rispetto a terra. L'amplificatore operazionale è un amplificatore con ingresso differenziale e uscita single-ended.

1.12.1 Amplificatori operazionali ideali

L'amplificatore operazionale ideale è un amplificatore differenziale ideale con le seguenti caratteristiche:

- Nell'amplificatore operazionale ideale, gli ingressi non assorbono corrente; l'impedenza di ingresso è infinita. L'uscita si comporta come una sorgente di tensione ideale; l'impedenza di uscita è nulla ed è possibile prelevare qualsiasi quantità di corrente senza modificare la tensione.

- L'amplificatore operazionale è sensibile solo alla differenza di tensione tra i terminali in ingresso, qualsiasi segnale comune sui terminali in ingresso (e.g. segnali DC, rumore) viene ignorato. Questa proprietà è chiamata "common mode rejection ratio". Si può assumere che l'amplificatore operazionale ideale abbia una reiezione di modo comune infinita, ovvero un guadagno nullo per segnali di modo comune.

- Il guadagno A è chiamato guadagno differenziale o guadagno ad anello aperto. Per un amplificatore operazionale ideale il guadagno ad anello aperto è molto grande, idealmente infinito.

- L'amplificatore operazionale ideale amplifica segnali a tutte le frequenze, senza attenuazione. Si dice che ha una larghezza di banda infinita.

A causa del guadagno differenziale infinito, gli amplificatori operazionali vengono normalmente utilizzati con reti di retroazione negativa, in cui il segnale di uscita è riportato in ingresso in opposizione al segnale di ingresso. In queste condizioni, si dice che il circuito sta operando in condizioni di anello chiuso (closed loop). Se la retroazione non è presente, l'op amp opera ad anello aperto (open loop). Op amp con reti di retroazione resistiva formano diversi tipi di circuiti amplificatori, le cui caratteristiche non dipendono (significativamente) dai parametri dell'op amp.

I circuiti che contengono amplificatori operazionali possono essere analizzati assumendo alcune ipotesi semplificative.

- Dato che il guadagno ad anello aperto A dell'op amp ideale è infinito, un segnale di ingresso molto piccolo risulta in un segnale di uscita molto ampio. La retroazione negativa tende a riportare all'ingresso parte del segnale in uscita in opposizione al segnale di ingresso originario, annullando il segnale differenziale in ingresso. Si $v_2 - v_1 = 0$ e quindi $v_2 = v_1$. Questa condizione si chiama corto circuito virtuale (virtual short).

- Siccome l'op amp ideale ha una resistenza di ingresso infinita, la corrente in ingresso è nulla.

Queste ipotesi sono note come "golden rules" degli amplificatori operazionali. Utilizzando queste ipotesi e le leggi standard di analisi dei circuiti (e.g. Kirchoff) è molto semplice analizzare i circuiti con op amps.

1.12.2 Configurazione invertente

Il circuito in figura 31 è un op amp in configurazione invertente. Il segnale da amplificare, v_I, è applicato all'ingresso invertente. L'ingresso non invertente è connesso a massa. La resistenza R_2 è la rete di retroazione negativa. Assumiamo che l'op amp sia ideale, e usando le golden rules analizziamo il circuito per trovare il guadagno ad anello chiuso, $G = \frac{v_O}{v_I}$. I vari passaggi si possono seguire in figura 32.

L'ingresso non invertente è connesso a massa, quindi $v_+ = 0$. Per via del corto circuito virtuale si ha che $v_+ = v_-$, e quindi $v_- = 0$. Siccome nessuna corrente può scorrere negli ingressi dell'op amp, la corrente i_1 che scorre dalla sorgente di tensione attraverso R_1, è uguale alla corrente i_2 che scorre attraverso a R_2. Si può quindi scrivere

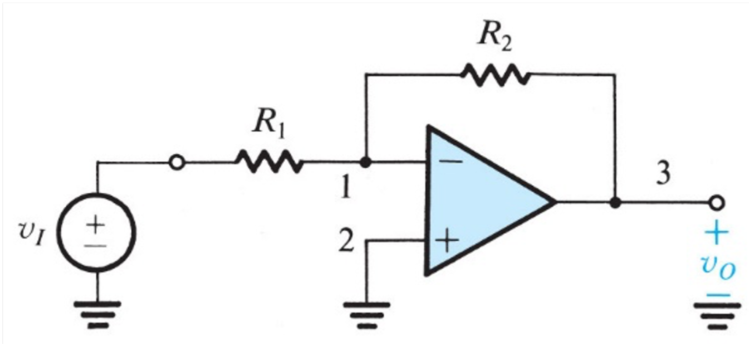

Figura 31: Op amp in configurazione invertente.

$$\frac{v_I - 0}{R_1} = \frac{0 - v_O}{R_2} \tag{31}$$

da cui si ottiene

$$G = -\frac{R_2}{R_1}. \tag{32}$$

Il guadagno ad anello chiuso per un op amp ideale dipende solo dalle resistenze esterne. Questa è una caratteristica desiderabile, dato che le resistenze hanno valori stabili e più precisi rispetto ai parametri di un op amp. Il fatto che il guadagno sia negativo significa che la tensione amplificata in uscita è sfasata di 180° rispetto alla tensione in ingresso. L'impedenza di ingresso è R_1. L'uscita si comporta come un generatore ideale di tensione e pertanto la resistenza in uscita è nulla.

1.12.3 Configurazione non invertente

Il circuito in figura 33 è un op amp in configurazione non invertente. Il segnale da amplificare, v_I, è applicato all'ingresso non invertente. L'ingresso invertente è connesso a massa tramite la resistenza R_1. La resistenza R_2 è la rete di retroazione negativa. Assumiamo che l'op amp sia ideale, e usando le golden rules analizziamo il circuito per trovare il guadagno ad anello chiuso, $G = \frac{v_O}{v_I}$. I vari passaggi si possono seguire in figura 34.

All'ingresso non invertente si ha $v_+ = v_I$. Per via del corto circuito virtuale si ha che $v_+ = v_-$, e quindi $v_- = v_I$. Siccome nessuna corrente può scorrere negli ingressi dell'op amp, la corrente i_1 che scorre verso massa attraverso R_1, è uguale alla corrente i_2 che scorre attraverso a R_2. Si può quindi scrivere

$$\frac{v_I - 0}{R_1} = \frac{v_O - v_I}{R_2} \tag{33}$$

da cui si ottiene

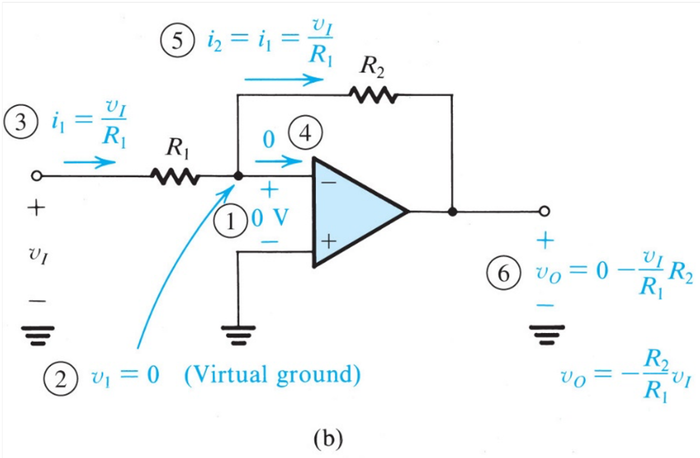

Figura 32: Analisi dell'op amp in configurazione invertente.

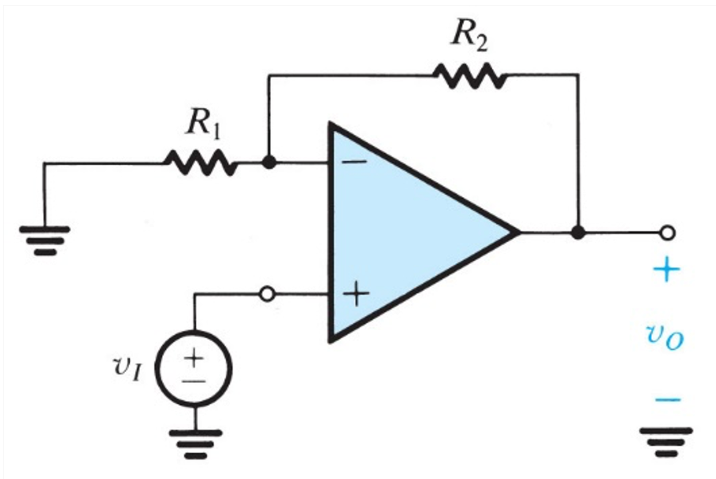

Figura 33: Op amp in configurazione non invertente.

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \tag{34}$$

Il guadagno ad anello chiuso per un op amp ideale dipende solo dalle resistenze esterne. Questa è una caratteristica desiderabile, dato che le resistenze hanno valori stabili e più precisi rispetto ai parametri di un op amp. L'impedenza di ingresso è infinita perché nessuna corrente può scorrere dalla sorgente di tensione nell'ingresso non invertente dell'op amp. L'uscita si comporta come un generatore ideale di tensione e pertanto la resistenza in uscita è nulla.

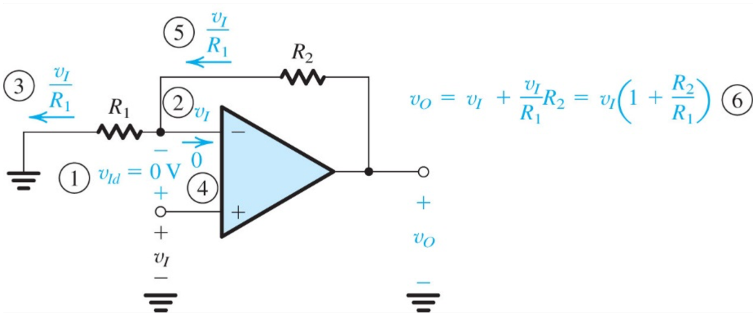

Figura 34: Analisi dell'op amp in configurazione non invertente.

1.12.4 Buffer di tensione a guadagno unitario

Il circuito in figura 35 è un buffer di tensione a guadagno unitario o inseguitore di tensione. Questo circuito è l'op amp in configurazione non invertente di figura 33 con $R_1 \to \infty$ e $R_2 \to 0$. In queste condizioni il guadagno diventa unitario, $G \to 1$. I valori delle resistenze in ingresso e in uscita del buffer sono quelli dell'op amp in configurazione non invertente, rispettivamente, molto alto, idealmente infinito, e molto basso, idealmente zero. Questo circuito si usa per connettere circuiti con impedenza di uscita alta a circuiti con impedenza di ingresso bassa, per evitare di perdere segnale nell'accoppiamento.

La figura 36 mostra un esempio. Una generatore di tensione di 1 V, con una resistenza di uscita di 1 MΩ, deve pilotare un carico con resistenza in ingresso di 1 kΩ. Se i due circuiti si connettono direttamente, al carico viene fornito solo 1 mV. Se si utilizza un buffer di tensione con una resistenza di ingresso molto alta e una resistenza di uscita molto bassa, 100 Ω nell'esempio, al carico viene fornita quasi tutta la tensione in ingresso.

1.12.5 Configurazione invertente con impedenze complesse

Utilizzando un op amp in configurazione invertente con un condensatore nel feedback (Z_2) o nel percorso di ingresso invertente (Z_1) possiamo costruire derivatori e integratori. Il guadagno ad anello chiuso è calcolato come sopra, ma con impedenze complesse, quindi $G(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1}$. Più precisamente, questa è la funzione di trasferimento del circuito per segnali

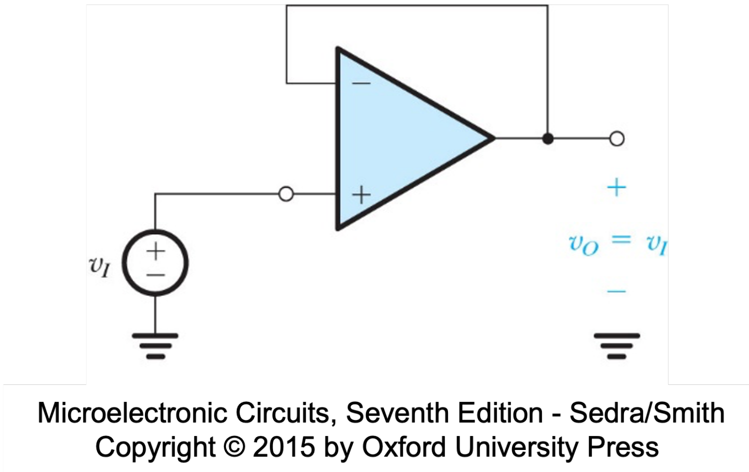

Figura 35: Buffer di tensione a guadagno unitario.

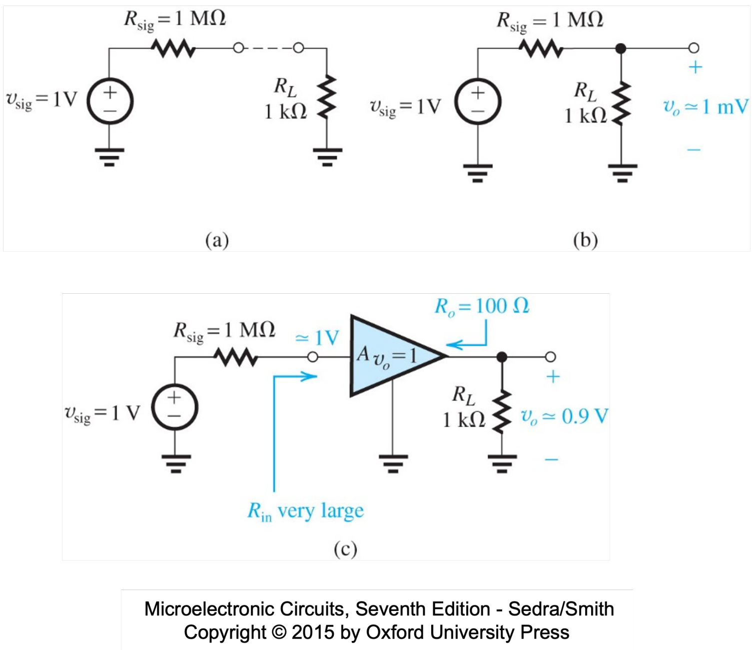

Figura 36: Esempio di utilizzo di un buffer di tensione a guadagno unitario.

sinusoidali in ingresso di frequenza ω. L'ampiezza di $G(\omega)$ è il guadagno dell'op amp ad anello chiuso.

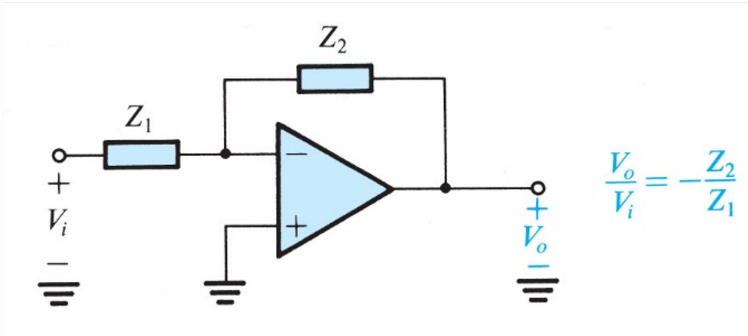

Figura 37: Op amp in configurazione invertente con impedenze.

Consideriamo il circuito di figura 38. Assumiamo che l'op amp sia ideale e usiamo le golden rules. Per questo circuito otteniamo

$i_1 = \frac{v_I}{R}$

$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i_1 dt = \frac{1}{RC}\int v_I dt$

$v_o = v_- - v_C = 0 - \frac{1}{RC}\int v_I dt = -\frac{1}{RC}\int v_I dt.$

Questo circuito è un integratore. Fornisce una tensione in uscita che è proporzionale all'integrale della tensione in ingresso. Ha una costante di tempo CR. Il segno negativo indica che è un integratore invertente.

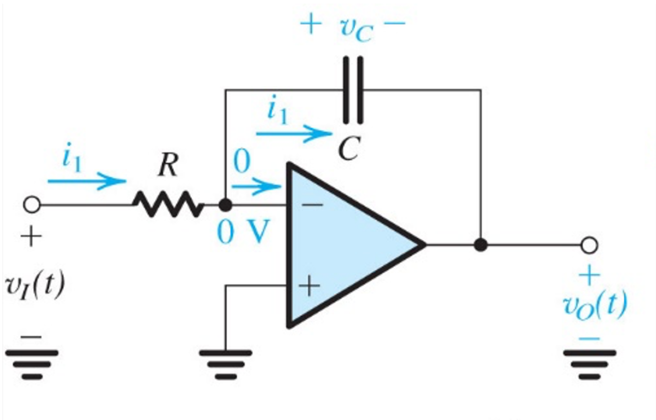

Figura 38: Integratore.

Il circuito si può alternativamente analizzare nel campo delle frequenze, con impedenze complesse. In questo caso si ottiene:

$$G = -\frac{Z_C}{Z_R} = -\frac{1}{j\omega RC}, \tag{35}$$

$$|G| = -\frac{1}{\omega RC}, \tag{36}$$

$$\phi = +90°. \tag{37}$$

Il diagramma di Bode dell'ampiezza della funzione di trasferimento mostrato in figura 39 si può dedurre dall'eq 36. Se la frequenza raddoppia, l'ampiezza si dimezza. Come già discusso in precedenza, questo corrisponde a una linea con pendenza pari a -20 dB/decade. Alla frequenza $\omega_{int} = \frac{1}{CR}$, l'ampiezza è 0 db perchè $|G = 1|$. L'intergatore si comporta come un filtro passa basso con una frequenza di taglio a $\omega = 0$.

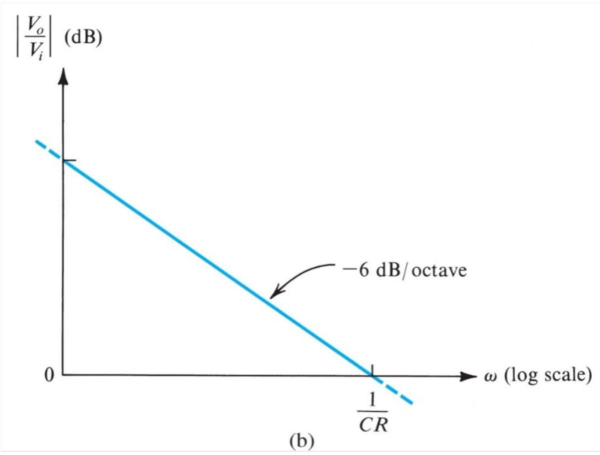

Figura 39: Risposta in frequenza di un integratore.

Consideriamo ora il circuito di figura 40. Assumiamo che l'op amp sia ideale e usiamo le golden rules. Per questo circuito otteniamo

$i = C\frac{dv_I}{dt} = -\frac{v_O}{R}$

$v_O = -RC\frac{dv_I}{dt}$

Questo circuito è un derivatore. Fornisce una tensione in uscita che è proporzionale alla derivata della tensione in ingresso. Ha una costante di tempo CR. Il segno negativo indica che è un differenziatore invertente.

Il circuito si può alternativamente analizzare nel campo delle frequenze, con impedenze complesse. In questo caso si ottiene:

$$G = -\frac{Z_C}{Z_R} = -j\omega RC, \tag{38}$$

$$|G| = \omega RC, \tag{39}$$

$$\phi = -90°. \tag{40}$$

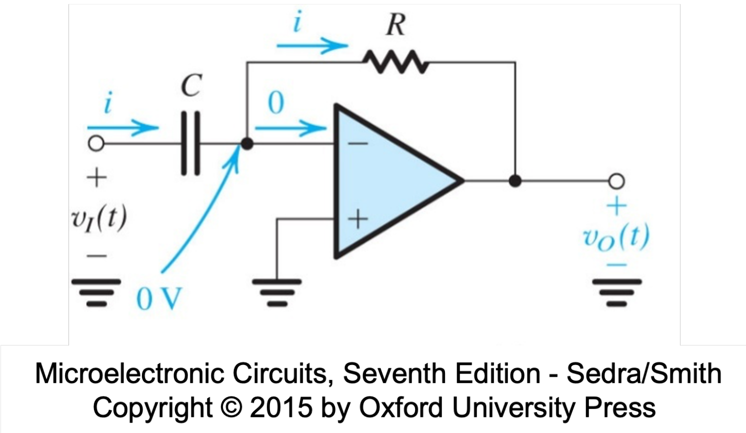

Figura 40: Derivatore.

Il diagramma di Bode dell'ampiezza della funzione di trasferimento mostrato in figura 41 si può dedurre dall'eq 39. Se la frequenza raddoppia, l'ampiezza raddoppia. Come già discusso in precedenza, questo corrisponde a una linea con pendenza pari a +20 dB/decade. Alla frequenza $\omega_{int} = \frac{1}{CR}$, l'ampiezza è 0 db perchè $|G = 1|$. Il differenziatore si comporta come un filtro passa alto con una frequenza di taglio a $\omega = \infty$.

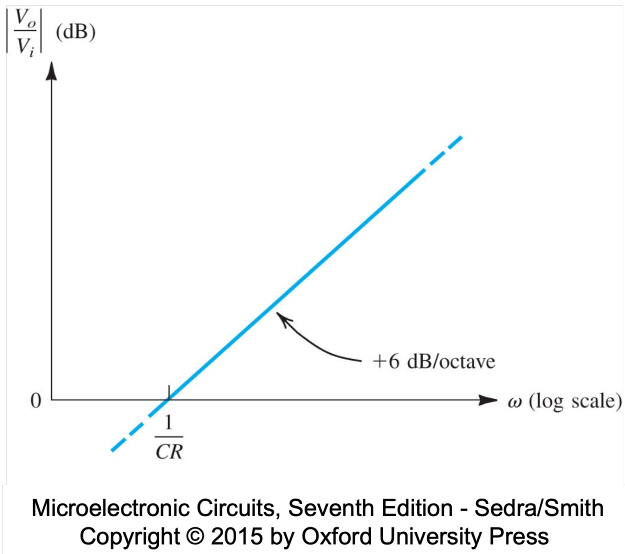

Figura 41: Risposta in frequenza di un derivatore.

1.12.6 Amplificatori operazionali reali

- Un amplificatore operazionale reale ha un guadagno ad anello aperto molto alto ma non infinito. Calcoliamo il guadagno ad anello chiuso, $G = \frac{v_O}{v_I}$, della configurazione invertente prendendo in considerazione il guadagno ad anello aperto finito dell'op amp. I vari passaggi si possono seguire in figura 42.

$v_O = A(v_+ - v_-) \rightarrow v_+ - v_- = \frac{v_O}{A}$
$v_+ = 0 \rightarrow v_- = -\frac{v_O}{A}$
$i = \frac{v_I - (-\frac{v_O}{A})}{R_1}$
$v_O = -\frac{v_O}{A} - iR_2 = -\frac{v_O}{A} - R_2 \frac{v_I + \frac{v_O}{A}}{R_1}$
$G = \frac{v_O}{v_I} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1 + R_2/R_1}{A}}$
Per $A \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \frac{R_2}{R_1}$. Per approssimare il guadagno ad anello chiuso al valore ideale $A \gg \frac{R_2}{R_1}$.

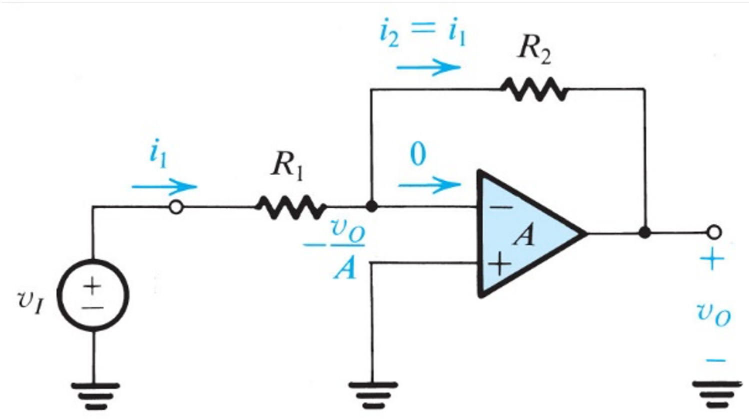

Figura 42: Analisi della configurazione invertente prendendo in considerazione il guadagno ad anello aperto finito dell'op amp.

- La reiezione di modo comune di un op amp reale è finita, e quindi il guadagno per segnali di modo comune non è nullo. La caratteristica di trasferimento di un op amp reale quindi è
$$v_O = A_d(v_+ - v_-) + A_{cm}(\frac{v_+ + v_-}{2}). \tag{41}$$
A_d è il guadagno ad anello aperto differenziale per segnali in ingresso differenziali, i.e $v_{Id} = (v_+ - v_-)$. A_{cm} è il guadagno per segnali di modo comune su entrambi gli ingressi, i.e $v_{Icm} = (\frac{v_+ + v_-}{2})$. il common mode rejection ratio si definisce come $CMRR = 20log_{10}\frac{|A_d|}{|A_{cm}|}$.
- Gli ingressi di un op amp reale presentano un'impedenza molto alta ma non infinita ($Z_i \approx M\Omega$). Una piccola corrente, dell'ordine del nA, scorre negli ingressi dell'op amp reale.

- L'uscita di un op amp reale non si comporta come un generatore di tensione ideale. L'impedenza di uscita è bassa (qualche centinaio di Ohm), ma non nulla. La corrente che si può fornire al carico, senza influenzare la tensione in uscita, è limitata in un range definito. La tensione fornita al carico non può superare i limiti di saturazione, L_+ e L_-.

- Un op amp reale non amplifica tutte le frequenze del segnale in ingresso senza attenuazione. La risposta in frequenza di un op amp è quella di un filtro passa basso con guadagno.

- Negli op amp reali esiste una tensione (costante, DC) di offset in ingresso. Questa è presente anche se gli inputs dell'amp sono connessi l'uno con l'altro e messi a terra. Per via del guadagno A molto elevato, l'uscita dell'op amp satura a L_+ o L_-, a seconda che la tensione di offset in ingresso sia positiva o negativa. Questo effetto si compensa applicando un offset della stessa ampiezza e polarità opposta tra i due terminali di ingresso.

- Per via delle correnti che scorrono negli ingressi dell'op amp, in un op amp reale si ha una tensione in uscita anche in assenza di una tensione applicata agli ingressi. Questo effetto si compensa aggiungendo una resistenza in serie all'ingresso non invertente, di valore uguale alla resistenza equivalente vista dal terminale invertente, i.e. il parallelo di R_1 e R_2.