21 Novembre

Teorema del confronto: Se $f, g \in L[a,b]$ e se

$f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$, allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.} \qquad (1)$$

In particolare, se $f, g \in C^0([a,b])$ con

$f(x) \le g(x) \ \forall\, x \in [a,b]$ e se sono due

funzioni distinte, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx \qquad (2)$$

Dim della (1). Se $\boxed{f(x) \le g(x) \ \forall\, x \in [a,b]}$ (3)

e se $\Delta$ è una decomposizione di $[a,b]$

$\Delta \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

allora (3) implica per ogni $[x_{i-1}, x_i]$

$$\sup f([x_{i-1},x_i]) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$$
$$\le \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} = \sup g([x_{i-1},x_i])$$

$$\inf f([x_{i-1},x_i]) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$$
$$\le \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\} = \inf g([x_{i-1},x_i])$$

$$\Rightarrow S(\Delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \overbrace{\sup f([x_{i-1},x_i])}^{\le \sup g([x_{i-1},x_i])}$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup g([x_{i-1},x_i]) = S(\Delta, g)$$

$$S(\Delta,f) \le S(\Delta,g) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{D}$$

Analogamente

$$s(\Delta,f) \le s(\Delta,g) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{D}$$

$$s(\Delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1},x_i]) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf g([x_{i-1},x_i]) = s(\Delta, g)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{*b} f(x)\,dx = \inf\{S(\Delta,f) : \Delta \in \mathcal{D}\} \le$$
$$\le \inf\{S(\Delta,g) : \Delta \in \mathcal{D}\} = \int_a^{*b} g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b g(x)\,dx$$

Ieri abbiamo detto che

se $f \in L[a,b] \Rightarrow |f| \in L[a,b]$

e che

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad *$$

($*$ analoga alla formula

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big)$$

Dimostriamo $*$ sappiamo che

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \qquad \forall x$$

Per il teorema del confronto

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad **$$

Qui siccome $|f(x)| \geq 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\, dx \geq 0$

$$** \Longleftrightarrow \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

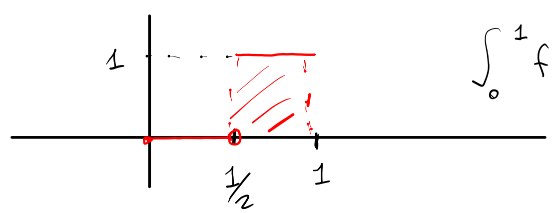
cioè $*$ è vero

Teorema (della media)

Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora $\exists\ c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} =: \fint_a^b f(x)\,dx$$

<u>Osservazione</u> $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$




$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\fint_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

non esiste alcun $c \in [0,1]$ t.c. $f(c) = \fint_0^1 f(x)\,dx$

<u>Dim del teorema</u> Siccome $f \in C^0([a,b])$ per il Teorema di Weierstrass $\exists\ x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

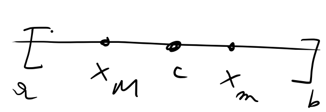
$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

$$\int_a^b f(x_m)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x_M)\,dx$$

$$f(x_m)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(x_M)(b-a) \qquad \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$f(x_m) \le \fint_a^b f(x)\,dx \le f(x_M)$$

Applicando il teorema dei valori intermedi ricaviamo che tra i due punti $x_m$ e $x_M$




esiste un punto $c$ t.c.

$$f(c) = \fint_a^b f(x)\,dx$$

Abbiamo detto che

$$f \in L[a,b] \Rightarrow |f| \in L[a,b]$$

Il viceversa è falso. Ci sono casi con $|f| \in L[a,b]$ ma con $f \notin L[a,b]$.

Esempio. Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Allora $|f(x)| \equiv 1 \Rightarrow |f(x)| \in L[a,b] \quad \forall [a,b]$

Invece $f \notin L[a,b] \quad \forall [a,b]$

Ricordiamoci che $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Notare che $D(x) = \dfrac{f(x)+1}{2}$

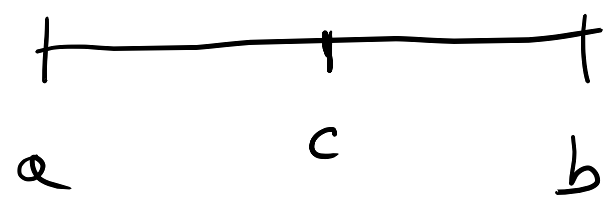
Infatti $\dfrac{f(x)+1}{2} = \begin{cases} \text{se } x \in \mathbb{Q} & \dfrac{f(x)+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ \text{se } x \notin \mathbb{Q} & \dfrac{f(x)+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \end{cases}$

Ho dimostrato che $D(x) = \dfrac{f(x)+1}{2} = \dfrac{1}{2} f(x) + \dfrac{1}{2}$

Se esistesse $[a,b]$ t.c. $f \in L[a,b] \Rightarrow D(x) \in L[a,b]$

ma questo è ~~falso~~ falso perché sappiamo che $D(x) \notin L[a,b] \quad \forall [a,b]$.

**Teorema** Sia $[a,b]$ dato e sia $c \in (a,b)$.
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata.




Sono equivalenti le seguenti proposizioni

1) $f \in L[a,b]$

2) $f \in L[a,c]$, $f \in L[c,b]$

Se 1) e 2) sono vere, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg\left(\frac{x+x^9}{x+2x^8}\right)}{\sqrt{x^4+8x^6} \cdot \cancel{\underset{\downarrow\, 1}{\frac{\sin(x^5)}{x^5}}}\; x^5} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

$$\frac{x+x^9}{x+2x^8} = \frac{1+x^8}{1+2x^7} = 1 + \frac{1+x^8}{1+2x^7} - 1 = 1 + \frac{\cancel{1}+x^8-\cancel{1}-2x^7}{1+2x^7} =$$

$$= 1 + \frac{x^8-2x^7}{1+2x^7}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cancel{\frac{\lg\left(1+\frac{x^8-2x^7}{1+2x^7}\right)}{\frac{x^8-2x^7}{1+2x^7}}} \quad \frac{x^8-2x^7}{\underset{\downarrow\, 1}{1+2x^7}} \quad \frac{1}{x^5 \sqrt{x^4} \sqrt{1+8x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x-2)\,\cancel{x^7}}{\cancel{x^5}\;\cancel{x^2}\;\sqrt{1+8x^2}} = \frac{-2}{1}$$

$$= -2.$$

Torniamo al teorema del confronto

Vi ricordate che abbiamo detto che se $f, g \in C^0([a,b])$ con $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e se sono funzioni distinte allora

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Dimostriamolo</u> Siccome le due funzioni non sono uguali allora esiste $x_0 \in [a,b]$


t.c. $f(x_0) < g(x_0)$.

Scegliamo una costante $\varepsilon_0 > 0$ piccolo $0 < \varepsilon_0 < \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$

Per la continuità di $f$ e $g$ nel punto $x_0$ so che $\exists\, \delta_0 > 0$ t.c. per $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \cap [a,b]$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0 \quad \text{e}$$
$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_0$$

In particolare ho che $\quad g(x_0) - f(x_0) > 2\varepsilon_0 \iff \varepsilon_0 < \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0 < g(x_0) - \varepsilon_0 < g(x)$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \cap [a,b] = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$$


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta_0} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta_0}^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^{x_0-\delta_0} f(x)\,dx \le \int_a^{x_0-\delta_0} g(x)\,dx \quad \text{perché} \quad f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a, x_0 - \delta_0]$$

$$\int_{x_0+\delta_0}^b f(x)\,dx \le \int_{x_0+\delta_0}^b g(x)\,dx \quad \text{perché} \quad f(x) \le g(x)\ \forall x \in [x_0 + \delta, b]$$

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\,dx \le \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (f(x_0) + \varepsilon_0)\,dx = 2\delta\,(f(x_0) + \varepsilon_0) <$$
$$< 2\delta\,(g(x_0) - \varepsilon_0) = \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} (g(x_0) - \varepsilon_0)\,dx \le \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} g(x)\,dx$$

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\,dx < \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} g(x)\,dx$$

$$\int_a^{x_0-\delta_0} f(x)\,dx \le \int_a^{x_0-\delta_0} g(x)\,dx$$

$$\int_{x_0+\delta_0}^b f(x)\,dx \le \int_{x_0+\delta_0}^b g(x)\,dx$$

$$\overbrace{\int_a^{x_0-\delta_0} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta_0}^b f(x)\,dx}^{\int_a^b f(x)\,dx} <$$

$$< \underbrace{\int_a^{x_0-\delta_0} g(x)\,dx + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} g(x)\,dx + \int_{x_0+\delta_0}^b g(x)\,dx}_{\int_a^b g(x)\,dx}$$

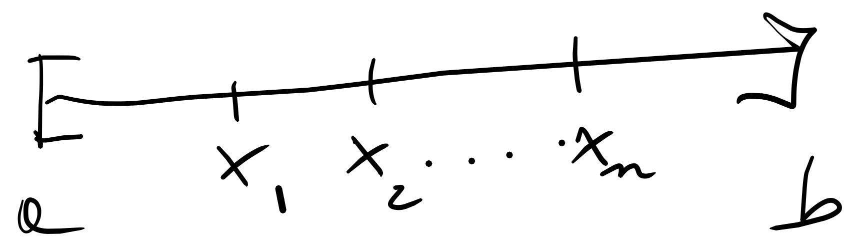
$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

## Osservazione

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Se $f \in L[a,b]$, se $X \subseteq [a,b]$ ha $\text{card}\, X < +\infty$

e se $g(x) = f(x) \quad \forall x \notin X$




$\Rightarrow \quad g \in L[a,b]$ e

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Definizione</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. $f$ si dice integrabile secondo Riemann se $\exists\ A\in\mathbb{R}$ t.c. $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ t.c. per ogni decomposizione $\Delta$

$$\Delta \quad x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

e per ogni scelta di punti $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, se $|\Delta|<\delta$ si ha

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(x_i^*)-A\right|<\varepsilon.$$

$A$ è l'integrale di Riemann di $f$ in $[a,b]$.

Osservazione $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i^*)$ sono chiamate somme di Riemann. Queste sono definite per qualsiasi funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

<u>Teorema</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sono equivalenti.

1) $f$ è integrabile per Darboux

2) $f$ è integrabile per Riemann.

Inoltre, quando 1 e 2 sono vere, l'integrale di Darboux coincide con l'integrale di Riemann. Denoteremo entrambi con $\int_a^b f(x)\,dx$.