

ASPETTI TOPOLOGICI

Consideriamo una teoria di comp in $d=1$, cioè i campi sono funzioni

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{Q} \\ x^{\mu} \mapsto \phi(x) \end{array} \right)$$

$$t \mapsto \varphi(t)$$

\mathcal{Q} viene detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Ci concentreremo ora su spazi \mathcal{Q} topologicamente non-triviali, con $\pi^1(\mathcal{Q}) \neq 0$

$\pi^1(\mathcal{Q})$ è il GRUPPO FONDAMENTALE di \mathcal{Q} :

- consideriamo i loop (curve chiuse) in \mathcal{Q} , cioè

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathcal{Q} \quad \text{t.c.} \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$

chiamiamo $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$ lo spazio dei loop di \mathcal{Q} ;

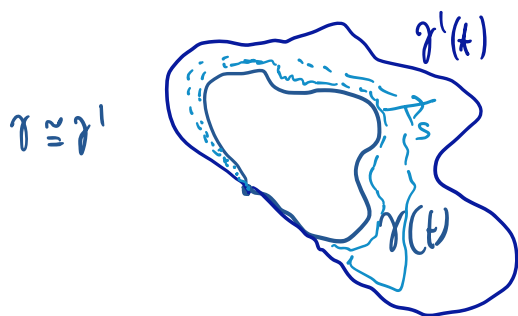
- prendiamo la relazione di equivalenza data dalle omotopie

$$\gamma \cong \gamma' \quad \text{se} \quad \exists \text{ omotopia (funz. continua)}$$

$$\alpha: \underbrace{[0,1]}_{t_0} \times \underbrace{[0,1]}_{s_0} \rightarrow \mathcal{Q}$$

(Per ogni valore di s fissato mi def. una curva)

$$\text{t.c.} \quad \alpha(t, 0) = \gamma(t) \quad \alpha(t, 1) = \gamma'(t)$$



- Tutti i loop deformabili in maniera continua l'uno nell'altro stanno in UNA CLASSE DI EQUIVALENZA

- Possiamo costruire lo spazio quoziente (con l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza)

$$\mathcal{L}(Q) / \sim \cong \pi^{-1}(Q)$$

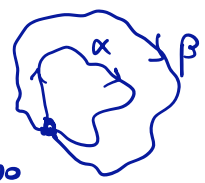
↑
ha una struttura di GRUPPO:

→ il PRODOTTO è costruito a partire da $\mathcal{L}(Q)$:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}(Q)$$

$$\alpha * \beta(t) \equiv \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t < 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha(1) = \beta(0)$



→ * da prodotto che soddisfa condiz. di gruppo

in $\pi^{-1}(Q)$:

- $Id = [\text{loop costante}] \quad \gamma(t) = \gamma_0$
- Invert $[\gamma(t)]^{-1} = [\gamma(1-t)]$
- Associatività è rispettata

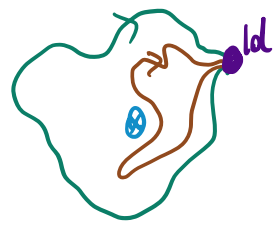
• Se $\pi^{-1}(Q) \neq 0 \rightarrow Q$ NON è SEMPLICEMENTE CONNESSO

→ ci sono loop che non sono equivalenti all'identità, cioè non possono essere contratti a un pto.

Esempi 1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\pi^{-1} \cong \mathbb{Z}$$

↑
gruppo con +



$$\alpha \neq \beta$$

112
8

Un loop che gira n volte attorno {0} \neq a un loop " " m " " " {0} se $n \neq m$

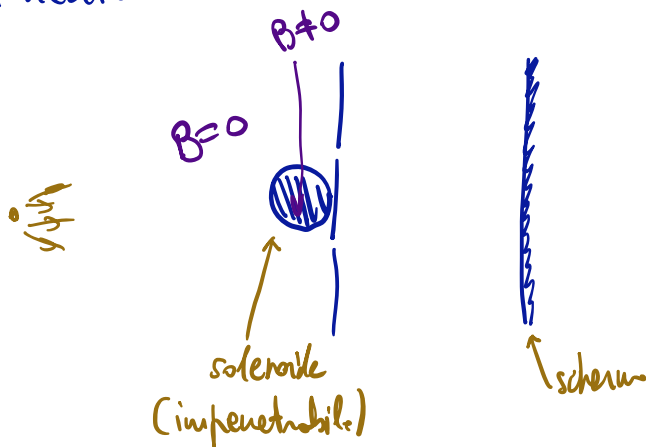
$$[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}] \quad (\text{isomorfismo di gruppi})$$

2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro infinito}\}$ $\pi^1 \cong \mathbb{Z}$

AAARONOV-BOHM EFFECT

Consideriamo una particella che si muove in \mathbb{Q} ; la sua traiettoria è descritta da un CAMPO $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ ($d=1$).
Possiamo interpretare la Lagrangiana della particella $L(x, \dot{x})$ come la Lagrangiana di una teoria di campo 1 dimensionale.

Esperimento:



Le frange di interferenza CAMBIANO variando il campo magnetico B dentro il solenoide; inoltre, le fig. di interferenza si ripete uguale quando il flusso del campo magn. Φ_B è shiftato di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Sp. delle confj. $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \Rightarrow \pi^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$

Consideriamo un potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi$$

↑ ↑
 parametri arbitrari angolo azimutale

$$\Rightarrow B = dA = 0$$

classicamente ci aspettiamo forza nulla sulla particella

$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \frac{\theta \hbar c}{e}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$

$$\int_{\partial D = S^1} A = \int_D B = \Phi_B$$

Cosa cambia accendendo $B \neq 0$ dentro il solenoide?

→ l'azione della particella carica cambia e viene aggiunto un termine

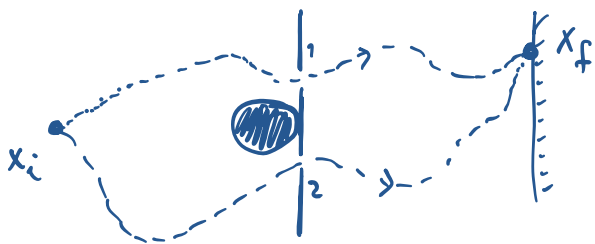
$$\int \mathcal{L}_A = -\frac{e}{c} \int dt \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} = -\frac{e}{c} \int_{\gamma} A \quad \text{con } A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi$$

↳ aggiungiamo alla lagrangiana un termine di derivata totale:

$$\mathcal{L}_A = \frac{d}{dt} \left(\vec{x} \cdot \vec{A} \left(-\frac{e}{c} \right) \right) \quad (\vec{A} \text{ e } \dot{\vec{x}} \text{ cost.})$$

⇒ Le eq. del moto (classiche) non vengono modificate
 ⇒ classicamente non si osserva alcun effetto al variare di B .

Tuttavia abbiamo aggiunto un nuovo termine in S :
 come cambia l'integrale sui cammini?



Era poco vedremo che tale \mathcal{L}_A introduce uno shift nelle diff. di fase tra le onde probabili delle due fenditure.

$$\Delta\phi'_{12} = \Delta\phi_{12} - \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_1 - \gamma_2} A = \Delta\phi_{12} - \frac{e \Phi_B}{\hbar c}$$

↑
cambia pattern d'interferenza

$$\text{con } \Phi_B = \oint A \quad \text{e} \quad A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi$$

Quindi due diverse connessioni A e A' producono la stessa dinamica se

$$\oint A' = \oint A + \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow A$ e A' sono equivalenti se $\theta - \theta' = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

Quindi:

- Diverse scelte di A sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$
- Classicamente, tutti i valori di θ danno "la stessa teoria" (cioè danno Lagrangiane equivalenti). Invece quantisticamente, c'è un continuo di "teorie inequivalenti".

\rightarrow Abbiamo diverse "teorie" quantistiche corrispondenti a una "teoria" classica (parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$).
Ovvero, ci sono quantizzazioni inequiv. di una teoria classica quando lo SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI non è semplicemente connesso ($\pi^1(Q) \neq 0$).

- Accendere B impone una diversa condizione sulla circuitazione di A su una curva che circonda il solenoide.