Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN)
Anno Accademico 2024/2025

Prof. Franco Obersnel

Motivazioni. Cenni alla trasmissione di un segnale: codifica e digitalizzazione. Il metodo di campionamento. Il metodo di decomposizione in blocchi base. La necessità di rappresentare un segnale come serie di armoniche. L'equazione del calore. Il metodo di separazione delle variabili. Autovalori del problema di Dirichlet associato all'equazione del calore. Tre problemi: funzioni che ammettono la rappresentazione in serie, definizione di convergenza, regolarità della serie. Funzioni periodiche di periodo T, frequenza, frequenza angolare. Una funzione $T-$periodica è sempre $kT-$periodica per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Derivata e primitiva di una funzione periodica. Integrale di una funzione periodica su un intervallo di lunghezza T. Polinomi trigonometrici. Armoniche elementari, ampiezza, fase. Rappresentazioni equivalenti. Relazione tra i coefficienti nelle diverse rappresentazioni. Fase di un armonica in notazione complessa. Lo spazio $L^2(E)$. Ortogonalità. Teorema di Pitagora. Energia di una funzione L^2. Energia di un polinomio trigonometrico. Analisi spettrale: spettro di ampiezze, spettro di fasi.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi. Reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. $\mathbb{C}$ non è un campo-ordinato. Numeri reali come particolari numeri complessi. Numeri immaginari puri. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Piano di Gauss - Argand. Metrica e topologia in $\mathbb{C}$: palla aperta $B(z_0, r)$, intorno di un punto, punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme, insiemi limitati. Successioni e serie di numeri complessi. Limite di una successione e somma di una serie. Relazione tra convergenza di una successione/serie e delle rispettive successioni/serie delle parti reali e immaginarie. Insiemi compatti (per successioni). Caratterizzazione dei compatti come chiusi e limitati. Serie di numeri complessi. Somma di una serie. Serie assolutamente convergenti. La serie geometrica. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. La formula di Eulero. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Notazione esponenziale. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formule di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radici $n-$esime di un numero complesso. Determinazione principale della radice $n-$esima. La funzione logaritmo (determinazione principale) e le sue proprietà. Rappresentazione di una funzione complessa di variabile complessa: parte reale e parte immaginaria, campo vettoriale associato, notazione polare. Funzioni continue. Limite per $z \to z_0$ di una funzione. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Proprietà principali della funzione esponenziale, delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche (formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari). Equazioni del tipo $\mathrm{sen}(z) = c$. Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Curve semplici, curve chiuse. Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Funzione derivabile in un punto. Derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Continuità di una funzione derivabile. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni analitiche. Funzioni olomorfe. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Serie di potenze nel campo complesso, ripasso delle nozioni base: raggio e disco di convergenza, convergenza uniforme e assoluta, serie di Taylor.

Integrazione complessa e funzioni analitiche. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Somma (concatenazione) di curve. Circuiti (lacci). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Integrale su una curva di una funzione complessa. Teorema sulla stima del modulo. Passaggio del limite dentro il segno integrale, esempi. Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (senza dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione e formula del valor medio di Cauchy. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e formule integrali di Cauchy per le derivate. Primitive, funzioni primitivabili, funzioni localmente primitivabili. Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio ma è localmente primitivabile. Funzioni localmente primitivabili e funzioni olomorfe. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili con gli integrali (cenni di dimostrazione). Aperti semplicemente connessi. Funzioni olomorfe e funzioni primitivabili su un aperto semplicemente connesso. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Il principio di massimo per le funzioni olomorfe (solo enunciato). Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Il teorema sugli zeri di molteplicità infinita. Insiemi discreti. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico. Applicazione del prolungamento analitico alla dimostrazione di alcune proprietà delle funzioni. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico); polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine); singolarità essenziale. Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Un'applicazione dei residui per il calcolo di un integrale su $\mathbb{R}$. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera di potenze. Parte caratteristica (singolare, principale) e parte regolare. Teorema di Laurent. Classificazione delle singolarità mediante la serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Il "metodo dei residui" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent in un intorno forato di un polo di ordine k. Il metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Il teorema dei residui. Valor principale (di Cauchy) $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ con eventuali punti singolari. Lemma del grande cerchio, lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$ e delle trasformate di Fourier (in particolare della funzione $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$). Calcolo degli integrali $PV\!\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $PV\!\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-a)}\,dx$, $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$, $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$. Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ con f funzione di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

Serie di Fourier. Cenni agli spazi $L^p(E)$, con $p \geq 1$ o $p = \infty$. Relazione di inclusione tra gli spazi L^p per i casi $1, 2, \infty$. Lo spazio di Hilbert $L^2(]-\pi,\pi])$. Famiglie ortonormali canoniche complesse e reali in $L^2(]-\pi,\pi])$. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il teorema di migliore approssimazione e la proiezione ortogonale su un sottospazio di H di dimensione finita. Coefficienti di Fourier complessi e reali. Polinomio di Fourier di una funzione in $L^2(]-\pi,\pi])$, reale e complesso. Il caso delle funzioni dispari e delle funzioni pari. Linearità dei coefficienti. Esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier. Il caso di funzioni $T-$periodiche con $T \neq 2\pi$. Energia di una funzione di $L^2(]-\pi,\pi])$. Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval. Il teorema di convergenza in media quadratica (solo enunciato). Lo spazio ℓ^2. Isomorfismo tra $L^2(]-\pi,\pi])$ e ℓ^2. Il lemma di Riemann Lebesgue (dimostrazione per funzioni L^2). Il problema della convergenza puntuale: cenni storici (i contributi di Du Bois Reymond, di Katznelson e Kahane, di Carleson e Hunt, di Kolmogorov). Nucleo di Dirichlet e sue rappresentazioni. Rappresentazione integrale della ridotta della serie di Fourier con nucleo di Dirichlet. Funzioni continue a tratti e funzioni C^1 a tratti. Funzione regolarizzata. Il teorema di Dirichlet-Weierstrass. Il teorema generale di convergenza uniforme. Il teorema di convergenza uniforme per funzioni C^1 a tratti. Funzioni assolutamente continue. Serie di Fourier della funzione derivata e della funzione integrale. Il problema di Basilea. Regolarità e ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.

Trasformate di Fourier. Introduzione euristica alla trasformata di Fourier come estensione della serie di Fourier per $T \to +\infty$. Definizione. Funzioni pari e dispari. Esempi: la funzione porta, la funzione $e^{-a|x|}$, la funzione $\frac{1}{a^2+x^2}$, la Gaussiana e^{-ax^2}. Continuità e limitatezza della trasformata. Linearità e continuità dell'operatore di Fourier. Comportamento asintotico della trasformata (lemma di Riemann-Lebesgue). Moltiplicazioni per esponenziali complessi, traslazioni, riscalamento, coniugio. La trasformata della derivata. La derivata della trasformata. Il calcolo della trasformata della Gaussiana usando i teoremi sulle derivate. Il prodotto di convoluzione. Il teorema di Fubini per l'integrale di Riemann e per l'integrale di Lebesgue (solo enunciati). Il teorema di Tonelli (solo enunciato). Esistenza e proprietà del prodotto di convoluzione.

Esempio: la funzione tenda. Cenno ai nuclei di convoluzione (il nucleo di Dirichlet, i nuclei di Gauss, Poisson, mollificatori). Il teorema di approssimazione mediante mollificatori (solo enunciato). La densità di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ (solo enunciato). La trasformata della convoluzione. Il problema dell'antitrasformata. Difficoltà e idea per dimostrare il teorema di inversione di Fourier. La formula di dualità. La trasformata del prodotto. Il Lemma di Plancherel per le funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$: il Teorema di Plancherel (idea e schema della dimostrazione). Esempio: la trasformata della funzione seno cardinale. La trasformata di Fourier nella teoria dei campionamenti: funzioni a banda limitata, il Teorema di Shannon-Nyquist. Esempi di applicazione della trasformata e delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali (equazione del calore su un filo limitato e illimitato).

Trasformate di Laplace. Funzione di Heaviside. Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace di una funzione. Funzioni di ordine esponenziale. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier. Comportamento asintotico della trasformata. Trasformabilità della funzione $t \cdot f(t)$. Teorema di analiticità della trasformata e formula per la derivata $k-$esima della trasformata. Trasformata della funzione potenza $t^n\, u(t)$. Smorzamento, cambiamento di scala e traslazione. Trasformata delle funzioni $\mathrm{sen}(at)$, $\cos(at)$, $\mathrm{senh}(at)$, $\cosh(at)$. Esempio di trasformata di una funzione definita a tratti. Trasformata di un segnale periodico. Funzioni impulso di durata h e altezza $1/h$, cenni alla distribuzione delta di Dirac δ e alla sua trasformata. La delta come derivata distribuzionale del gradino. Trasformata della derivata. La formula per funzioni con discontinuità isolate di tipo salto e interpretazione usando la derivata distribuzionale. Prodotto di convoluzione di due segnali. Trasformata del prodotto di convoluzione. Il problema della trasformata inversa. "Quasi" iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$. La formula di Bromwich-Mellin / Riemann-Fourier. Scorciatoie per il calcolo dell'antitrasformata. I teoremi del valore iniziale e del valore finale. Trasformata di una primitiva. Trasformate del seno cardinale e del seno integrale. Applicazione delle trasformate alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, ai sistemi lineari, alle equazioni integrali e integro-differenziali, ai circuiti elettrici (cenni), alle equazioni alle derivate parziali (cenni). La funzione Gamma di Eulero e le sue principali proprietà. Singolarità della funzione Γ. Trasformata delle funzioni t^α, (in particolare $f(t) = \sqrt{t}$ e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$).

Testi consigliati Appunti sul corso (scaricabile dal sito moodle). G. Tironi, Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (scaricabile dal sito). G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2007.

Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel e alla pagina moodle del corso potete trovare ulteriori informazioni sul corso, gli esercizi assegnati a lezione, esempi di compiti d'esame, appunti.