

FORMULARIO METODI MATEMATICI 2025

Analisi Complessa

Determinazione principale del logaritmo: $\text{Log}(\omega) = \log(|\omega|) + i\text{Arg}(\omega)$

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= i \sinh(z) & \cos(iz) &= \cosh(z) \\ \sin(x + iy) &= \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \\ \cos(x + iy) &= \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)\end{aligned}$$

Residuo in un polo di ordine n : $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$

Serie di Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Identità di Parseval

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{T}{2} \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) = \|f\|_2^2.$$

Traformate di Fourier

Trasformata della derivata:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right\}(\omega) = (i\omega)^k \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$$

Derivata della trasformata:

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = (-i)^k \mathcal{F}\{x^k f(x)\}(\omega)$$

Traslazione nel tempo:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \implies f(x - x_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega x_0} \hat{f}(\omega)$$

Traslazione nella frequenza:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \implies \hat{f}(\omega - \omega_0) \longleftrightarrow e^{i\omega_0 x} f(x)$$

Scalaggio nel tempo:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \implies f(ax) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Coniugio:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \implies \overline{f(x)} \longleftrightarrow \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

Plancherel:

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$$

Trasformate notevoli:

$$\chi_{[a,b]}(x) \longleftrightarrow \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

$$e^{-a|x|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\frac{1}{a^2 + x^2} \longleftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$e^{-ax^2} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$p_{2a}(x) \longleftrightarrow 2a \operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{\pi}\right)$$

$$\Lambda_a(x) \longleftrightarrow a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2\pi}\right)$$

Trasformate di Laplace

Trasformata della derivata:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right\}(s) = \\ = s^k F(s) - s^{k-1}f(0^+) - s^{k-2}f'(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+)$$

Derivata della trasformata:

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = (-1)^k \mathcal{L}\{x^k f(x)\}(s)$$

Traslazione nel tempo:

$$\begin{aligned} \text{Se } f(x) &\longleftrightarrow F(s) \\ \implies f(x-x_0)u(x-x_0) &\longleftrightarrow e^{-sx_0}F(s) \end{aligned}$$

Traslazione nei complessi:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s) \implies F(s-s_0) \longleftrightarrow e^{s_0 x} f(x)$$

Scalaggio nel tempo:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s) \implies f(ax) \longleftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Trasformate notevoli:

$$\sin(ax) \longleftrightarrow \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\sinh(ax) \longleftrightarrow \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\cos(ax) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\cosh(ax) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$x^\alpha u(x) \longleftrightarrow \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Trasformata di un segnale periodico:

$$\begin{aligned} \text{Se } f(x) &\longleftrightarrow F(s) \text{ segnale periodico, } f^*(x) \longleftrightarrow F^*(s) \text{ t.c. } f^*(x) = f(x)(u(x) - u(x-T)) \\ \implies F^*(s) &= F(s)(1 - e^{-sT}) \end{aligned}$$

Prodotto di convoluzione:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$