Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Residui e integrali.

Prof. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si usi il metodo dei residui per calcolare i seguenti integrali.

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1-\cos z}\,dz$ dove γ parametrizza la circonferenza di centro 0 e raggio 6;

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z-3)^2}\,dz$ dove γ parametrizza il rettangolo di vertici $-2, 2, -2i, 2i$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\vartheta}{5+3\operatorname{sen}\vartheta}\,d\vartheta$;

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}\vartheta\,\cos\vartheta}\,d\vartheta$;

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+4}{(x^2+2x+2)(x^2+9)}\,dx$;

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$;

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen}x}{4-x^2}\,dx$.

Esercizio 2 Si usi il metodo dei residui per calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Soluzioni:

1. a) 0; b) $\frac{5}{18}\pi i$; c) $\frac{2}{9}\pi$; d) $\frac{4}{\sqrt{15}}\pi$; e) $\frac{13}{51}\pi$; f) $\frac{\pi}{4}$; g) $\frac{\pi}{e}$; h) $-\pi\cos 2$.

2) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\omega}{2}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|}$.